# Lineare Funktionen und Funktionenscharen

Klassen 8 bis 11

# - Lösungen -

**1.** a) Ursprungsgeraden verlaufen durch den Punkt $O(0|0)$ des Koordinatensystems.
Die Geradengleichung hat die allgemeine Form $y = m \cdot x$

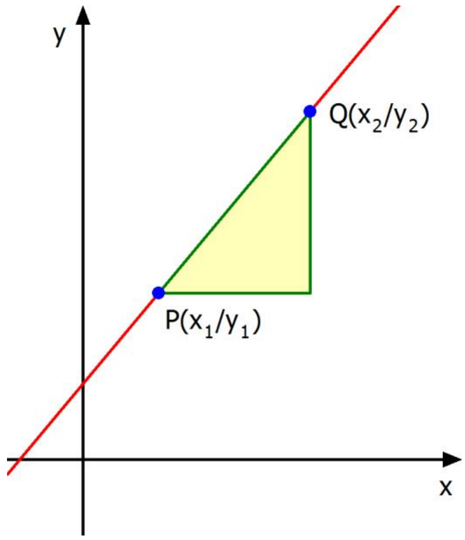
b) Die **Steigung** einer Geraden ist ein Maß für die Neigung (Steilheit) der Geraden gegen die x-Achse des KOS.

Der Formelbuchstabe ist meistens **m**.

Das Maß der Steigung kann durch zwei Punkte der Geraden bestimmt werden:

z.B. aus $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ folgt der Quotient

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$




**Steigungsdreieck**:

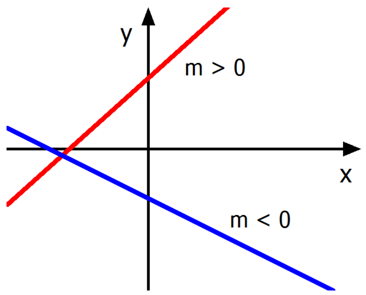
Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf der Geraden liegt, und dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

c) Steigt eine Gerade an (von links nach rechts betrachtet) so ist sie positiv:

$$\boxed{m > 0}$$

Fällt die Gerade, so ist sie negativ:

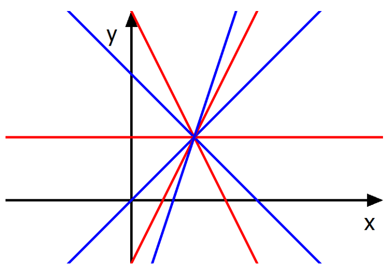
$$\boxed{m < 0}$$




d) **Geradenbüschel**

Mehrere Geraden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt (Büschelpunkt) haben.

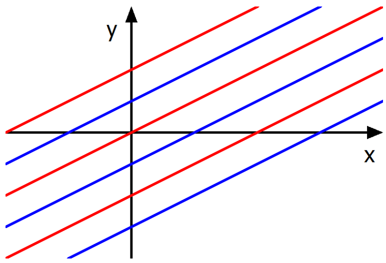
Jede dieser Geraden hat eine andere Steigung m.




**Parallelenschar**

Mehrere Geraden mit gleicher Steigung m.

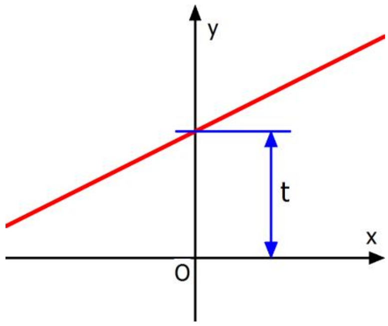
Jede dieser Geraden hat einen anderen y-Achsenschnittpunkt t.



# - Lösungen -

e) Geradengleichungen der Form $y = mx + t$ sind keine Ursprungsgeraden.

Sie schneiden die $y$-Achse im Abstand $t$ vom Ursprung.




f) Gleichungen der Form $y = m \cdot x$ oder $y = m \cdot x + t$ sind Funktionsgleichungen.
Die Punkte der jeweiligen Gleichung liegen immer auf einer Geraden.
Die durch die Gleichungen beschriebenen Funktionen heißen **lineare Funktionen**.

g) Die Geradengleichung $y = mx + t$ heißt **Normalform**.
Demgegenüber nennt man die Gleichung $ax + by + c = 0$ **allgemeine Form** der Geradengleichung.

Man nennt die Schreibweisen auch

$y = mx + t$ explizite Form,

$ax + by + c = 0$ implizite Form; Voraussetzung $a, b, c \in \mathbb{R}$; $(a, b) \neq 0$

**2.** a) $y = 2x$

$\underline{\underline{m = 2}}$

b) $y = -\frac{1}{3}x$

$\underline{\underline{m = -\frac{1}{3}}}$

c) $y = -4{,}5x$

$\underline{\underline{m = -4{,}5}}$

d) $-2x - 3y = 0$

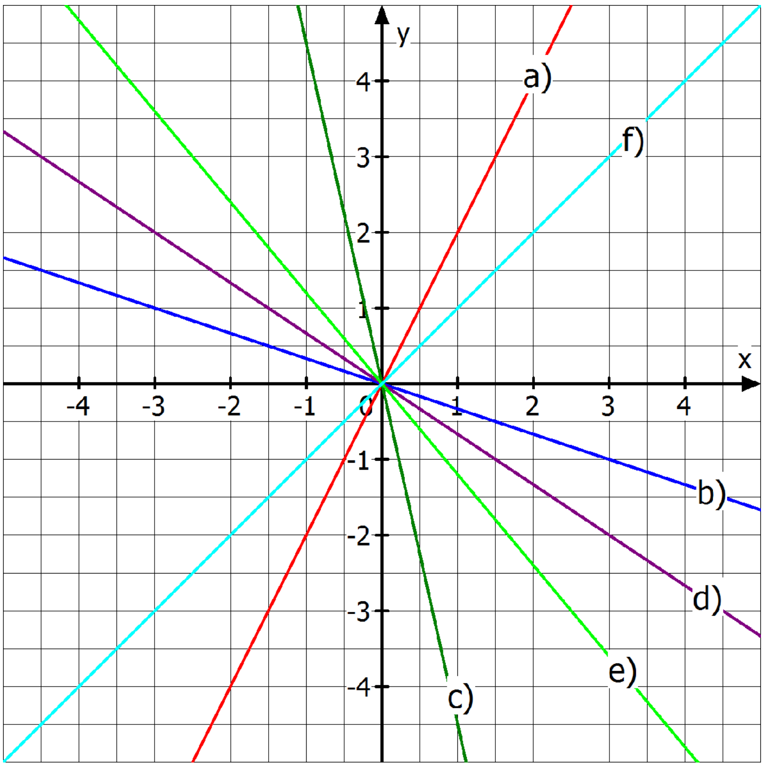
$\underline{\underline{m = -\frac{2}{3}}}$

e) $\frac{1}{3}y + \frac{2}{5}x = 0$

$\underline{\underline{m = -\frac{6}{5}}}$

f) $3y - 3x = 0$

$\underline{\underline{m = 1}}$



# - Lösungen -

**3.** Einsetzen der Punkte in die jeweilige Geradengleichung.

a) $\underline{g_1:\ 5x-2y=0}$ mit $P_1\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{1}{5}\right)$; $P_2\left(-0{,}6\,\middle|\,-1{,}5\right)$

$$5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2\cdot\frac{1}{5}=0$$
$$\underline{-\frac{10}{3}-\frac{2}{5}\neq 0}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_1\notin g_1}}$$

$$5\cdot(-0{,}6)-2\cdot(-1{,}5)=0$$
$$\underline{0=0}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_2\in g_1}}$$

b) $\underline{g_2:\ -5y+2x=0}$ mit $A(6\,|\,3)$; $B(-5\,|\,-2)$

$$-5\cdot 3+2\cdot 6=0$$
$$\underline{-3\neq 0}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{A\notin g_2}}$$

$$-5\cdot(-2)+2\cdot(-5)=0$$
$$\underline{0=0}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{B\in g_2}}$$

**4.**

a) $A(2{,}5\,|\,-3)$: $\quad -3=m\cdot 2{,}5 \quad\Rightarrow m=-1{,}2 \quad\Rightarrow \underline{\underline{y=-1{,}2x}}$

b) $B(-4{,}5\,|\,0)$: $\quad 0=m\cdot(-4{,}5) \quad\Rightarrow m=0 \quad\Rightarrow \underline{\underline{y=0}}$

c) $C\left(\frac{1}{3}\middle|-1\frac{2}{5}\right)$: $\quad -1\frac{2}{5}=m\cdot\frac{1}{3} \quad\Rightarrow m=-\frac{21}{5} \quad\Rightarrow \underline{\underline{y=-4\frac{1}{5}x}}$

**5.** Ursprungsgerade: $y=mx$

a) $A_1(0{,}3\,|\,2{,}7)$,

$$2{,}7=m\cdot 0{,}3$$
$$\underline{m=9}$$
$$\Rightarrow A_1\in \underline{g_1:\ y=9x}$$

$A_2(0{,}6\,|\,0{,}54)$:

$$0{,}54=m\cdot 0{,}6$$
$$\underline{m=0{,}9}$$
$$\Rightarrow A_1\in \underline{g_2:\ y=0{,}9x}$$

b) $B_1\left(\frac{1}{5}\middle|0{,}8\right)$,

$$0{,}8=m\cdot 0{,}2$$
$$\underline{m=4}$$
$$\Rightarrow B_1\in \underline{g_3:\ y=4x}$$

$B_2\left(0{,}4\middle|\frac{8}{5}\right)$

$$1{,}6=m\cdot 0{,}4$$
$$\underline{m=4}$$
$$\Rightarrow B_2\in \underline{g_4:\ y=4x}$$

c) $C_1(6\,|\,3)$,

$$3=m\cdot 6$$
$$m=0{,}5$$
$$\Rightarrow C_1\in \underline{g_5:\ y=0{,}5x}$$

$C_2(-6\,|\,-3)$

$$-3=m\cdot(-6)$$
$$m=0{,}5$$
$$\Rightarrow C_2\in \underline{g_6:\ y=0{,}5x}$$

# - Lösungen -

**6.** Funktion und Umkehrfunktion

$g_1:\ y = -\frac{1}{4}x \quad |$ vertausche $x \Leftrightarrow y$

$x = -\frac{1}{4}x$

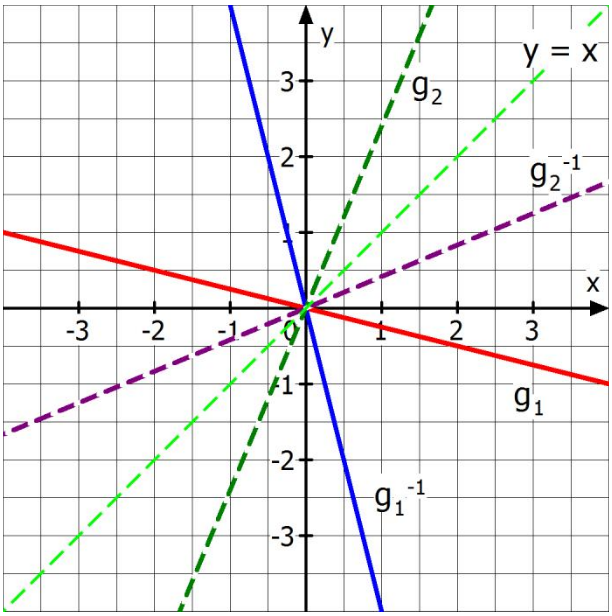
$g_1^{-1}:\ y = -4x$

$g_2:\ -5y + 12x = 0$

$y = 2{,}4x \quad |$ vertausche $x \Leftrightarrow y$

$x = 2{,}4y$

$g_2^{-1}:\ y = \frac{5}{12}x$




**7.** Für die Steigungen von senkrecht aufeinander stehenden Geraden gilt:

$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$

Gerade $g_1$:

$y - 0{,}45x = 0$

$y = 0{,}45x$

die zu $g_1$ senkrechte Gerade:

$h_1:\ y = -\frac{1}{0{,}45}x$

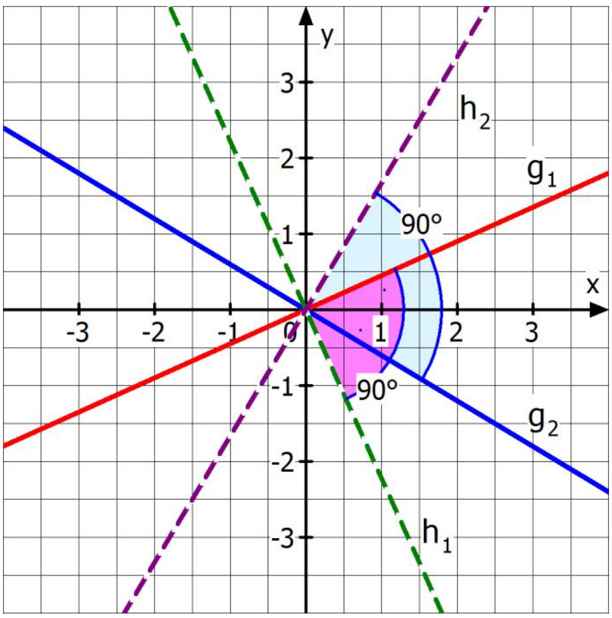
Gerade $g_2$:

$6x + 10y = 0$

$y = -\frac{3}{5}x$

die zu $g_2$ senkrechte Gerade:

$h_2:\ y = \frac{5}{3}x$



# - Lösungen -

**8.** a) $5x - 2y + 1 = 0$

$-2y = -5x - 1 \quad | : (-2)$

$\underline{y = 2{,}5x + 0{,}5}$

b) $y = -2(x+2) + 6$

$y = -2x - 4 + 6$

$\underline{y = -2x + 2}$

c) $0{,}75(x+2) - 3 - y = 0$

$y = 0{,}75x + 1{,}5 - 3$

$\underline{y = 0{,}75x - 1{,}5}$

Schnittpunkte mit der y-Achse ($x = 0$):

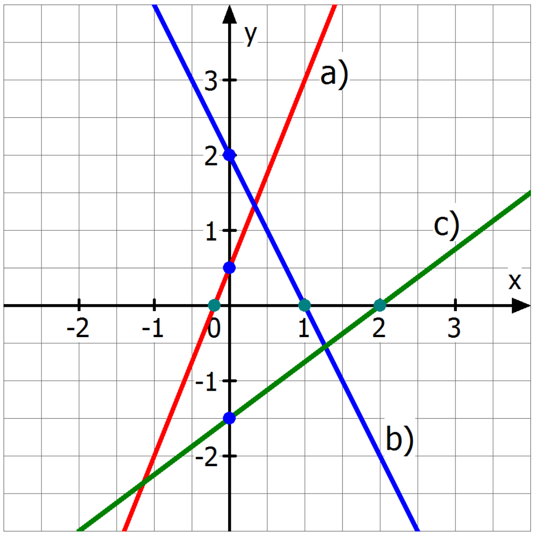
$\underline{\underline{S_y(0|0{,}5)}}$ $\quad$ $\underline{\underline{S_y(0|2)}}$ $\quad$ $\underline{\underline{S_y(0|-1{,}5)}}$

Schnittpunkte mit der x-Achse ($y = 0$):

a) $0 = 2{,}5x + 0{,}5$; $\underline{x = -0{,}2}$; $\underline{\underline{S_x(-0{,}2|0)}}$

b) $0 = -2x + 2$; $\underline{x = 1}$; $\underline{\underline{S_x(1|0)}}$

c) $0 = 0{,}75x - 1{,}5$; $\underline{x = 2}$; $\underline{\underline{S_x(2|0)}}$




**9.** a) Gegeben: $m = 2{,}5$ und $S(-3|-17)$

**Lösungsweg 1**:

Punkt-Steigungsform

$y = m(x - x_1) + y_1$

$m = 2{,}5$ und $S(-3|-17)$ einsetzen:

$y = 2{,}5(x - (-3)) - 17$

$\underline{y = 2{,}5(x + 3) - 17}$

auf die Normalform bringen:

$y = 2{,}5x + 7{,}5 - 17$

$\underline{\underline{y = 2{,}5x - 9{,}5}}$

**Lösungsweg 2**:

Geradengleichung in der Normalform

$y = mx + t$

$m = 2{,}5$ und $S(-3|-17)$ einsetzen:

$-17 = 2{,}5 \cdot (-3) + t$

$\underline{t = -9{,}5}$

$m = 2{,}5$ und $t = -9{,}5$ einsetzen in:

$y = mx + t$

$\underline{\underline{y = 2{,}5x - 9{,}5}}$

b) Gegeben: $t = -4{,}5$ und $A\left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{5}{6}\right)$

Einsetzen der gegebenen Werte in die Normalform:

$$y = mx + t$$

$$\frac{5}{6} = m \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4{,}5$$

$$\frac{2}{3}m = -\frac{9}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{27}{6} - \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3}m = -\frac{32}{6} \qquad \left| \cdot \frac{3}{2} \right.$$

$$m = -\frac{32 \cdot 3}{6 \cdot 2}$$

$$\underline{m = -8}$$

$m = -8$ und $t = 4{,}5$ einsetzen in die Normalform:

$$y = mx + t$$

$$\underline{\underline{y = -8x - 4{,}5}}$$

**10.** a) **<u>Lösungsweg 1</u>** für $A(0 | -3)$ und $B(1{,}5 | 4)$

Steigung der Geraden bestimmen und diesen Wert zusammen mit den Koordinaten einer der beiden Punkte einsetzen in die <u>Normalform</u>. Dadurch erhält man zunächst den y-Achsenabschnitt t. Anschließend t und m in die Normalform der Geradengleichung einsetzen.

Steigung m der Geraden:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-3)}{1{,}5-0} = \frac{7}{1{,}5} \qquad \text{oder} \qquad m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3-4}{0-1{,}5} = \frac{-7}{-1{,}5}$$

Normalform der Geradengleichung:

$$y = mx + t$$

$m = \frac{14}{3}$ und die Koordinaten von $A(0 | -3)$ einsetzen

$$-3 = \frac{14}{3} \cdot 0 + t$$

$$\underline{t = -3}$$

Gleichung der Geraden:

$$y = \frac{14}{3}x - 3$$

$$\underline{\underline{y = 4\frac{2}{3}x - 3}}$$

b) **<u>Lösungsweg 2</u>** für $P\left(-6 \mid -7\right)$ und $Q\left(-11 \mid 2{,}5\right)$

Steigung der Geraden bestimmen und diesen Wert zusammen mit den Koordinaten einer der beiden Punkte einsetzen in die <u>Punkt-Steigungsform</u>.

Steigung m der Geraden:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2{,}5 - (-7)}{-11 - (-6)} = \frac{9{,}5}{-5} \quad \text{oder} \quad m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-7 - 2{,}5}{-6 - (-11)} = \frac{-9{,}5}{5}$$

$$\underline{m = -1{,}9}$$

Punkt-Steigungsform:

$$y = m\left(x - x_1\right) + y_1$$

$m = -1{,}9$ und die Koordinaten von $Q\left(-11 \mid 2{,}5\right)$ einsetzen

$$y = -1{,}9\left(x - (-11)\right) + 2{,}5$$

$$y = -1{,}9\,x - 1{,}9 \cdot 11 + 2{,}5$$

$$\underline{\underline{y = -1{,}9\,x - 18{,}4}}$$

c) **<u>Lösungsweg 3</u>** für $S\left(12 \mid 1{,}5\right)$ und $T\left(8 \mid -1{,}5\right)$

Die Koordinaten beider Punkte einsetzen in die <u>Zwei-Punkteform</u>:

$$\frac{y - y_S}{x - x_S} = \frac{y_T - y_S}{x_T - x_S}$$

$$\frac{y - 1{,}5}{x - 12} = \frac{-1{,}5 - 1{,}5}{8 - 12} \qquad \left| \cdot (x - 12) \right.$$

$$y - 1{,}5 = \frac{-3}{-4} \cdot (x - 12) \qquad \left| + 1{,}5 \right.$$

$$y = 0{,}75\left(x - 12\right) + 1{,}5$$

$$\underline{\underline{y = 0{,}75x - 7{,}5}}$$

**11.** Die Gerade g hat die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-4)}{10 - 0} = \frac{4}{10}$$

$$\underline{m = 0{,}4}$$

Die Steigung m und die Koordinaten von B einsetzen in:

$$y = mx + t$$

$$0 = 0{,}4 \cdot 10 + t$$

$$\underline{t = -4}$$

Die Gerade g hat die Gleichung:

$$\underline{\underline{g:\ y = 0{,}4x - 4}}$$

Die Gerade h hat die Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2{,}5 - 11}{8{,}5 - (-0{,}5)} = \frac{-13{,}5}{9}$$

$$\underline{m = -1{,}5}$$

Die Steigung m und die Koordinaten von P einsetzen in:

$$y = mx + t$$

$$11 = -1{,}5 \cdot (-0{,}5) + t$$

$$\underline{t = 10{,}25}$$

Die Gerade h hat die Gleichung:

$$\underline{\underline{h:\ y = -1{,}5x + 10{,}25}}$$

Schnittpunkt der Geraden g mit h:

$0{,}4x - 4 = -1{,}5x + 10{,}25$

$1{,}9x = 14{,}25 \quad | :1{,}9$

$\underline{x = 7{,}5} \quad \Rightarrow$ einsetzen in: $y = 0{,}4x - 4$

$y = 0{,}4 \cdot 7{,}5 - 4$

$\underline{y = -1}$

$\underline{\underline{S(7{,}5\,|\,-1)}}$

Schnittpunkte der Geraden h mit den Koordinatenachsen:

Weil der y-Achsenabschnitt den Wert +10,25 hat, ist der Schnittpunkt von h mit der
y-Achse:

$\underline{\underline{S_y(0\,|\,10{,}25)}}$

Der Schnittpunkt von h mit der x-Achse ist nun:

$0 = -1{,}5x + 10{,}25$

$\underline{x = 6{,}8\overline{3}}$

$\underline{\underline{S_x(6{,}8\overline{3}\,|\,0)}}$

**12.** a) Berechnung des Schnittpunktes von $f: y = -0{,}5x + 3$ mit $g: y = 1{,}5x - 3$:

$-0{,}5x + 3 = 1{,}5x - 3$

$-2x = -6$

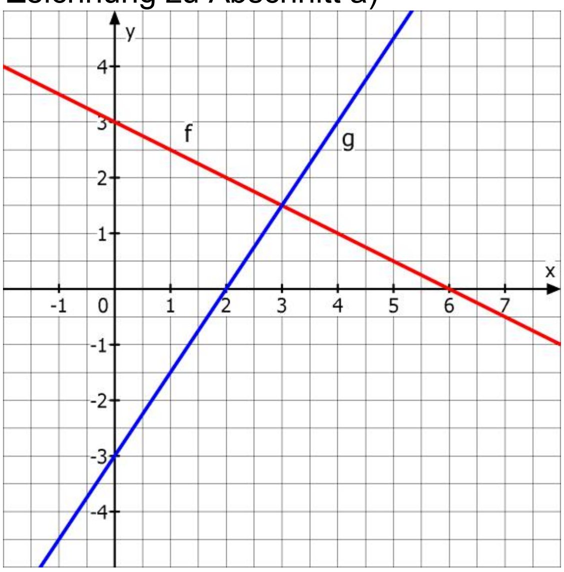
$\underline{x = 3}$

$x = 3$ einsetzen in $y = -0{,}5x + 3$:

$y = -0{,}5 \cdot 3 + 3$

$\underline{y = 1{,}5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(3\,|\,1{,}5)}}$

Zeichnung zu Abschnitt a)




b) Die Gerade h hat die Steigung:

$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$;

Somit: $h: \underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + 5}}$

In die Gerade $g: y = -4x + ...$ die Koordinaten von $P(-2{,}5\,|\,12)$ einsetzen:

$12 = -4 \cdot (-2{,}5) + t$

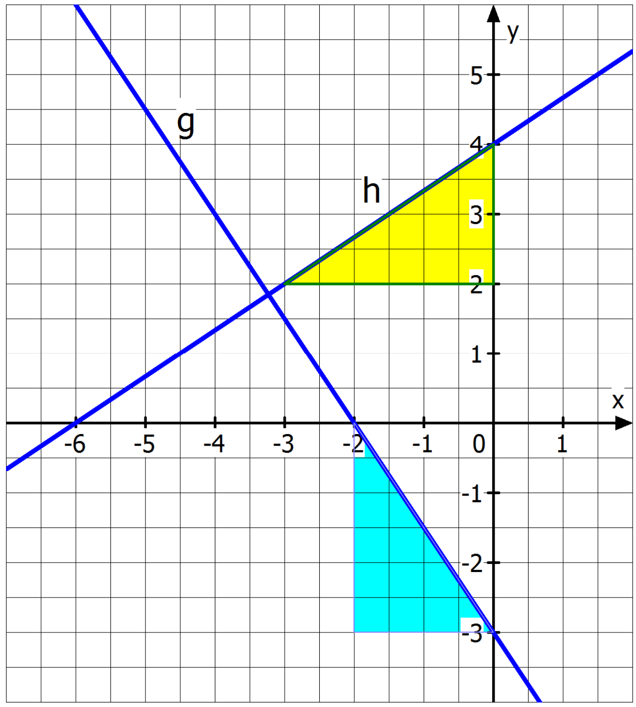
$\underline{t = 2}$

Somit: $g: \underline{\underline{y = -4x + 2}}$

# - Lösungen -

**13.** a) Steigungsdreiecke eingezeichnet.

Zeichnung zu Abschnitt a)




Die Geradengleichungen lauten:

$g: y = -\frac{3}{2}x - 3$

$h: y = \frac{2}{3}x + 4$

b) Weil die Gerade s parallel zu $y = -0{,}2x + 16$ verläuft, hat sie die gleiche Steigung, nämlich $-0{,}2$.

Gerade s:
$y = -0{,}2x + t$

Koord. von $R(-3|-1)$ einsetzen:

$-1 = -0{,}2 \cdot (-3) + t$

$t = -1{,}6$

Die Gerade s hat die Gleichung:

$y = -0{,}2x - 1{,}6$

c) Die Gerade t verläuft durch die beiden Punkte $S(-3|-4)$ und $T(5|0)$.

Die Steigung der Geraden t ist:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-4)}{5-(-3)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Die Steigung m und die Koordinaten von T einsetzten in:

$y = mx + t$

$0 = 0{,}5 \cdot 5 + t$

$t = -2{,}5$

Die Gerade t hat die Gleichung:

$y = 0{,}5x - 2{,}5$

**14.** a) $G_f$: $y = \frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ $G_g$: $y = -\frac{4}{5}x + 4$

b) Den x-Wert von $P(-40|-17{,}5)$ eingesetzt in $y = \frac{1}{2}x + 2$ ergibt

$y = \frac{1}{2} \cdot (-40) + 2 = -18$.

Der y-Wert von P ist mit $-17{,}5$ größer als $-18$; somit liegt P **oberhalb** von $G_f$

# - Lösungen -

**15.** Gegeben ist die Gerade g mit

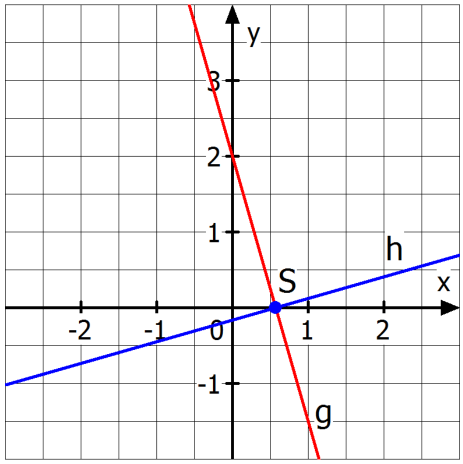
$$y + 3{,}5(x-2) + 5 = 0 \quad \Big| \text{ in die Normalform bringen}$$

$$\underline{y = -3{,}5x + 2}$$

Schnittpunkt mit der x-Achse ( y = 0 ):

$$0 = -3{,}5x + 2$$

$$\underline{x = \frac{2}{3{,}5} = \frac{4}{7}} \qquad \underline{y = 0} \qquad \Rightarrow S\left(\frac{4}{7}\middle|0\right)$$




Steigung der Geraden h bestimmen:

$$m_g \cdot m_h = -1$$

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-3{,}5}$$

$$\underline{m_h = \frac{2}{7}}$$

$m_h = \frac{2}{7}$ und die Koord. von $S\left(\frac{4}{7}\middle|0\right)$ einsetzen in die Punkt-Steigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{2}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right) + 0$$

$$h:\ \underline{\underline{y = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}}}$$

**16.** Schnittpunkte der Geraden $g: y = -\frac{5}{4}x + 5$

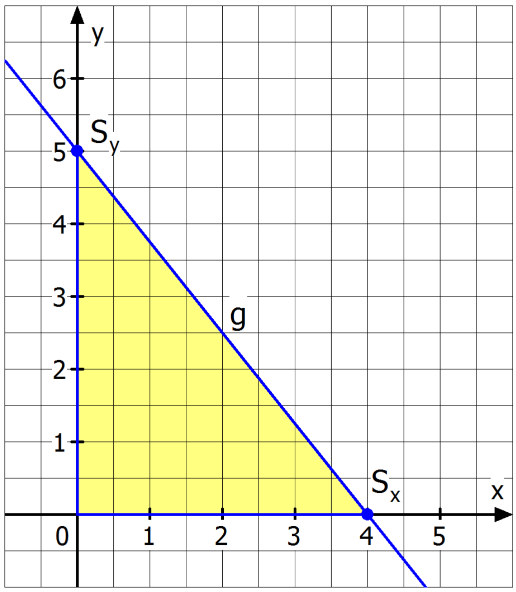
mit der x-Achse; $(y = 0)$: $S_x(4|0)$

mit der y-Achse; $(x = 0)$: $S_y(0|5)$

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist somit:

$$A_\Delta = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$\underline{\underline{A_\Delta = 10\,\text{FE}}}$$



# - Lösungen -

**17.** a) Koordinaten des Punktes $P(4|8)$ einsetzen in die gegeben Geradengleichung

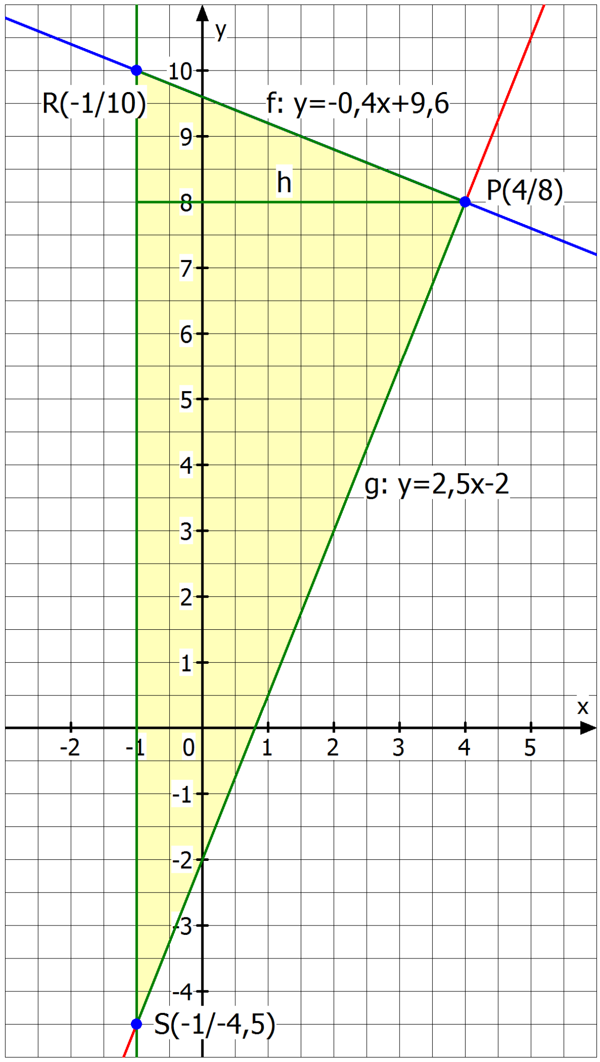
$$y = 2{,}5x - 2$$
$$8 = 2{,}5 \cdot 4 - 2$$
$$\underline{8 = 8 \quad (\text{wahr})}$$

b) Für die Steigungen der senkrecht aufeinander stehenden Geraden gilt:

$$m_g \cdot m_f = -1$$
$$m_f = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{2{,}5}$$
$$\underline{m_f = -0{,}4}$$

$m_f = -0{,}4$ und die Koordinaten von P einsetzen in die Punkt-Steigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$
$$y = -0{,}4(x-4) + 8$$
$$f:\ \underline{y = -0{,}4x + 9{,}6}$$




c) Schnittpunkt R:

$$y = -0{,}4x + 9{,}6 \quad \wedge \quad x_R = -1$$
$$y_R = -0{,}4 \cdot (-1) + 9{,}6$$
$$\underline{y_R = 10} \qquad \Rightarrow \underline{R(-1|10)}$$

Schnittpunkt S:

$$y = 2{,}5x - 2 \quad \wedge \quad x_S = -1$$
$$y_S = 2{,}5 \cdot (-1) - 2$$
$$\underline{y_S = -4{,}5} \qquad \Rightarrow \underline{S(-1|-4{,}5)}$$

Dreiecksfläche:

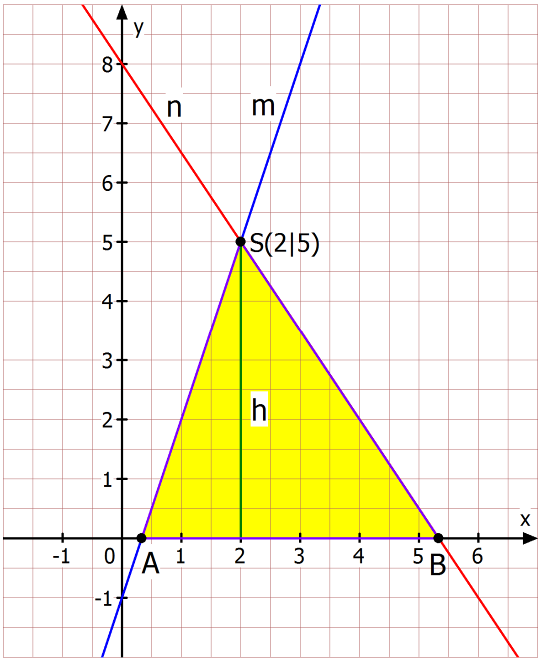
Grundlinie des Dreiecks ist die Länge [RS].
Die Dreieckshöhe h ist die Summe aus dem x-Wert 4 des Punktes P und dem Abstand 1 der Strecke [RS] von der y-Achse; somit sind
[RS] = 14,5 LE und h = 5 LE

$$A_{\Delta PRS} = \frac{1}{2} \cdot [RS] \cdot h$$
$$A_{\Delta PRS} = \frac{1}{2} \cdot 14{,}5\,\text{LE} \cdot 5\,\text{LE}$$
$$\underline{A_{\Delta PRS} = 36{,}25\,\text{FE}}$$

# - Lösungen -

**18.** a) Schnittpunkt S der Geraden $m:\ y = 3x - 1$ mit $n:\ y = -\frac{3}{2}x + 8$:

$$3x - 1 = -\frac{3}{2}x + 8$$
$$4{,}5x = 9$$
$$\underline{x = 2} \quad \Rightarrow y = 3 \cdot 2 - 1$$
$$\underline{y = 5} \qquad \underline{\underline{S(2|5)}}$$




b) Der Punkt A hat die x-Koordinate $x_A = \frac{1}{3}$,

der Punkt B hat die x-Koordinate $x_B = 5\frac{1}{3}$.

Daraus folgt: $[AB] = x_B - x_A = 5$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich

$$A_{\Delta ABS} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2}$$
$$\underline{\underline{A_{\Delta ABS} = 12{,}5\ \text{FE}}}$$

**19.** a) Gegeben:

$g:\ y = -\frac{2}{3}x + 3 \quad (1)$

Spiegelung an der x-Achse:

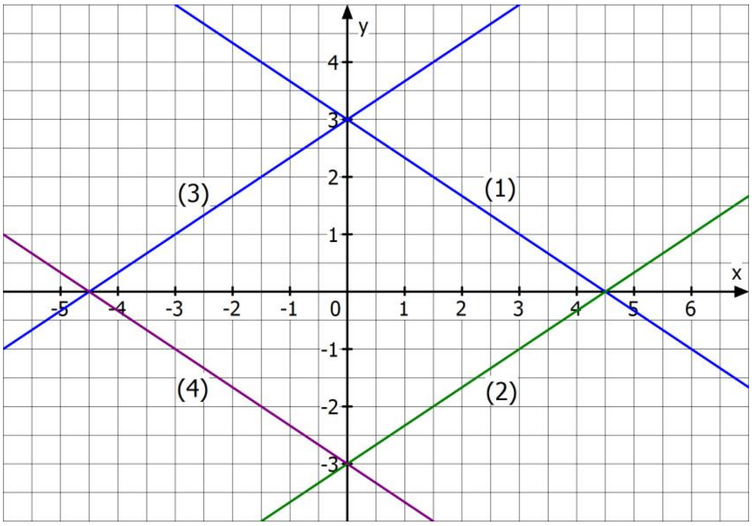
$y = \frac{2}{3}x - 3 \quad (2)$

Spiegelung an der y-Achse:

$y = \frac{2}{3}x + 3 \quad (3)$

Spiegelung am Ursprung:

$y = -\frac{2}{3}x - 3 \quad (4)$




b) Das Viereck ist eine Raute, bzw. es setzt sich aus zwei gleich großen Dreiecken zusammen:

$$A_{Raute} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 9 \cdot 3 = \underline{\underline{27\ \text{cm}^2}}$$

# - Lösungen -

**20.** a) Menge aller Punkte $S(x \mid -0{,}5x+2)$: $\Rightarrow$ $y = -0{,}5x+2$

Die Ortslinie aller Punkte S ist eine Gerade (Steigung $m = -0{,}5$, y-Achsenabschnitt $t = 2$).

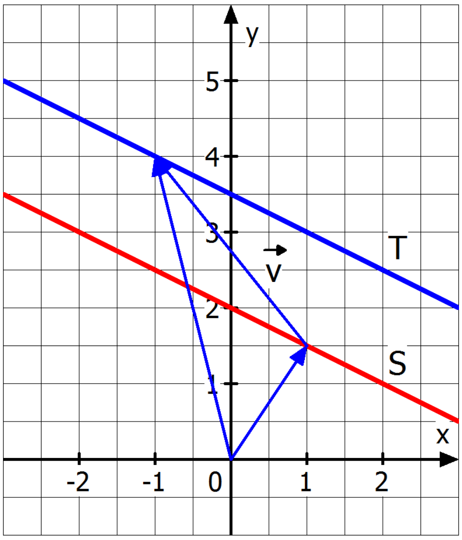
b) Die Punkte S werden mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ parallel verschoben auf die Bildpunkte T:

$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} \oplus \vec{v}$

$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} x-0 \\ -0{,}5x+2-0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} x-2 \\ -0{,}5x+4{,}5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T(x-2 \mid -0{,}5x+4{,}5)}}$




**21.** Gegeben ist die Parallelenschar g(a): $y = 3x-(a+2)$ mit $a \in \mathbb{Q}$

a) Gleichung der Scharparallelen $g_1$, die durch den Punkt $A(-6 \mid 1{,}5)$ geht.

Einsetzen der Koordinaten von A in die gegebene Gleichung:

$1{,}5 = 3 \cdot (-6) - (a+2)$

$a+2 = -19{,}5$

$\underline{a = -21{,}5}$ $\quad \Rightarrow$ einsetzen in $y = 3x-(a+2)$

$y = 3x-(-21{,}5+2)$

$\underline{\underline{y = 3x+19{,}5}}$

b) $a = 2$, $g_2$: $\underline{y = 3x-4}$ | $a = -8$, $g_3$: $\underline{y = 3x+6}$

Der y-Achsenabschnitt der Mittelparallelen $g_4$ liegt genau in der Mitte zwischen $-4$ und $+6$ der y-Achse.

Die Mittelparallele schneidet die y-Achse somit in $+1$.

$g_4$: $\underline{\underline{y = 3x+1}}$ $\quad \Rightarrow$ $\underline{\underline{a = -3}}$

# - Lösungen -

**22.** Gegeben ist die Gleichung einer Parallelenschar g(t): $y = -2x + t$.

a) $g_1: \ 2x - 3y + 5 = 0$

$$-3y = -2x - 5 \quad \big| : (-3)$$

$$\underline{y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{g_1 \notin g(t)}$$

Die Gerade $g_1$ gehört nicht zur Parallelenschar, weil die Steigung nicht $-2$ ist.

b) Einsetzen der gegeben Punkte $A(-2 \,|\, 3)$ und $B(1{,}5 \,|\, -8)$ in die Gleichung der Parallelenschar $y = -2x + t$:

$3 = -2 \cdot (-2) + t$ | $-8 = -2 \cdot 1{,}5 + t$

$\underline{t = -1}$ | $\underline{t = -5}$

c) Geradengleichung $\overline{P_1P_2}$ durch die Punkte $P_1(-4 \,|\, 4)$ und $P_2(3 \,|\, -5)$.
Punkt-Steigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \text{mit } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \qquad \text{mit } P_1(-4 \,|\, 4),\ P_2(3 \,|\, -5)$$

$$y = \frac{-5 - 4}{3 + 4}(x + 4) + 4$$

$$\overline{P_1P_2}: \ \underline{y = -\frac{9}{7}x - \frac{8}{7}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\overline{P_1P_2} \notin g(t),\ \text{da } m \neq -2}$$

d) Für die Steigungen senkrecht aufeinander stehender Geraden gilt:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad h(t): \ \underline{y = \frac{1}{2}x + t}$$

**23.** a) Gegeben ist das Geradenbüschel $g(m): y = mx + 3$.

Umformen in die Punkt-Steigungsform: $y = m(x - 0) + 3$

Alle Geraden laufen also durch den (Büschel-) Punkt $\underline{Q(0 \,|\, 3)}$

b) Gegebene Punkte einsetzen in $y = mx + 3$

$A(0{,}4 \,|\, 3)$: $\quad 3 = m \cdot 0{,}4 + 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{m = 0}$

$B(-2 \,|\, 4)$: $\quad 4 = m \cdot (-2) + 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{m = -\frac{1}{2}}$

$C\left(2{,}5 \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$: $\quad -\frac{1}{3} = m \cdot 2{,}5 + 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{m = -\frac{4}{3}}$

# - Lösungen -

c) Gegeben sind die Punkte $U(2|5)$ und $V(-3|0)$.

Die Gerade $\overline{UV}$ ist dann eine Büschelgerade, wenn der Büschelpunkt $Q(0|3)$ auf $\overline{UV}$ liegt. Punkt-Steigungsform der Geraden $\overline{UV}$:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \text{mit } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \qquad \text{mit } U(2|5),\ V(-3|0)$$

$$y = \frac{0 - 5}{-3 - 2}(x - 2) + 5$$

$\overline{UV}$: $\underline{y = x + 3}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $Q(0|3)$ einsetzen

$\Rightarrow\quad \underline{3 = 0 + 3}$ (wahr)

d) Gegeben ist der Büschelpunkt $R(3|4)$ eines zweiten Geradenbüschels h(m). Seine Gleichung kann mit der Punkt-Steigungsform ermittelt werden:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \big|\ R(3|4) \text{ einsetzen}$$

$h(m)$: $\underline{y = m(x - 3) + 4}$

e) Diejenige Gerade, die beiden Büscheln angehört, verläuft durch die Büschelpunkte Q und R. Gerade $\overline{QR}$ bestimmen:

Zwei-Punkteform

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \big|\ \text{nach } y \text{ auflösen}$$

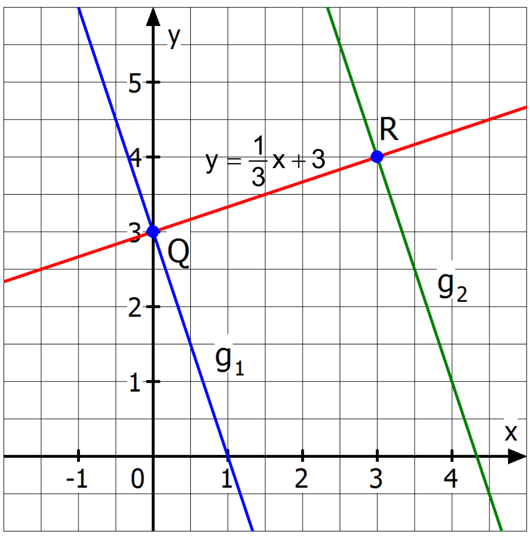
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \qquad \big|\ Q(0|3) \text{ und } R(3|4) \text{ einsetzen}$$

$$y = \frac{4 - 3}{3 - 0} \cdot (x - 0) + 3$$

$$\underline{y = \frac{1}{3}x + 3}$$

f) $g_1 \in g(m)$: $\underline{y = -3x + 3}$

$g_2 \in h(m)$: $\underline{y = -3x + 13}$



# - Lösungen -

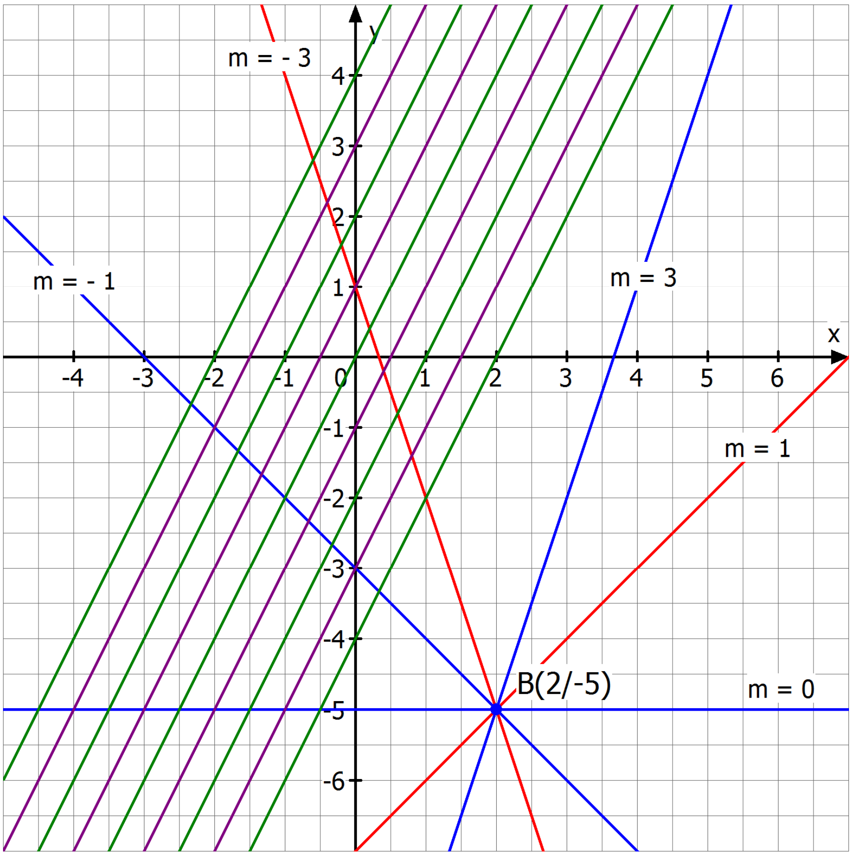
**24.** Das Geradenbüschel g(m) mit $y - mx + 2m + 5 = 0$ und die Parallelenschar g(t) mit $y - 2x - t = 0$ sind gegeben.

a) $y - mx + 2m + 5 = 0$

$y = mx - 2m - 5$

$\underline{\underline{y = m(x-2) - 5}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{B(2|-5)}}$

b)




c) Koordinaten des Ursprungs $O(0|0)$ einsetzen in $y = m(x-2) - 5$:

$0 = m(0-2) - 5$

$\underline{m = -2{,}5} \qquad \Rightarrow$ einsetzen in $y = m(x-2) - 5$

$y = -2{,}5(x-2) - 5$

$\underline{\underline{y = -2{,}5x}}$

d) Die gesuchte Gerade aus dem Geradenbüschel muss dieselbe Steigung wie die Parallelenschar haben, d.h. $m = 2$:

$g(m)\colon\ y = m(x-2) - 5 \quad | \, m = 2$

$y = 2(x-2) - 5$

$\underline{\underline{y = 2x - 9}}$

e) Eine Gerade, die zur Parallelenschar senkrecht ist, hat die Steigung $m = -\frac{1}{2}$:

$$g(m):\ y = m(x-2) - 5 \quad \Big|\ m = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) - 5$$

$$\underline{y = -\frac{1}{2}x - 4}$$

**25.** Gegeben sind die Punkte $P(0\,|\,2)$ und $Q(k\,|\,-2)$.

a) Die allgemeine Geradengleichung ist: $y = mx + t$

> Da alle Schargeraden durch P verlaufen und P auf der y-Achse liegt, ist P der y-Achsenabschnittspunkt => t = 2

$P(0\,|\,2)$ eingesetzt ergibt: $2 = m \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \underline{t = 2}$

$Q(k\,|\,-2)$ und $t = 2$ eingesetzt ergibt:

$$-2 = m \cdot k + 2$$
$$-4 = m \cdot k$$
$$m = -\frac{4}{k} \qquad \Rightarrow \underline{f_k(x) = -\frac{4}{k} \cdot x + 2; \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

In der Funktionsgleichung darf k nicht Null werden.

Hinweis:
Wäre $k = 0$ und somit der Punkt $Q(0\,|\,-2)$, so würde die Gerade durch P und Q senkrecht verlaufen. Eine senkrechte Gerade ist aber keine Funktion sondern eine Relation.

b) Schnittpunkt mit der x-Achse (y = 0):

$$0 = -\frac{4}{k}x + 2$$
$$\frac{4}{k}x = 2$$
$$\underline{x = \frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \underline{S_x\left(\frac{k}{2}\,\Big|\,0\right)}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse (x = 0):

$$f_k(x) = y = -\frac{4}{k} \cdot 0 + 2$$
$$\underline{y = 2}$$
$$\Rightarrow \underline{S_y(0\,|\,2)} \;\hat{=}\; P(0\,|\,2)$$

c) Parallel zur x-Achse bedeutet, dass die Steigung $m = 0$ ist:

$$\Rightarrow \underline{y = 2}$$

Begründungsversuch:

$$f_\infty(x):\ y = \lim_{k \to \infty}\left(-\frac{4}{k} \cdot x + 2\right) = 0 \cdot x + 2 = 2$$

$$f_\infty(x):\ y = 2 \text{ bzw. } k = \infty$$

Parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten heißt, dass die Steigung $m = 1$ ist:

$$\Rightarrow \underline{y = x + 2}$$

d) Für die Steigungen der senkrecht aufeinander stehenden Geraden gilt:

$$m_h \cdot m_f = -1$$

$$-4 \cdot \left(-\frac{4}{k}\right) = -1$$

$$\frac{16}{k} = -1$$

$$\underline{k = -16} \quad \Rightarrow \quad f_{-16}(x) = -\frac{4}{-16} \cdot x + 2$$

$$\underline{f_{-16}(x) = \frac{1}{4}x + 2}$$

Schnittwinkel $\alpha$ mit der x-Achse:

$$\tan\alpha = m = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \underline{\alpha \approx 14{,}04^\circ}$$

e) Der gemeinsame Schnittpunkt <u>aller</u> Geraden ist der Punkt $P(0|2)$, denn gemäß Aufgabenstellung müssen alle Geraden der Schar durch P gehen.

**26.** Gegeben sind die Punkte $P(1|3)$ und (die Nullstelle) $N(5|0)$.

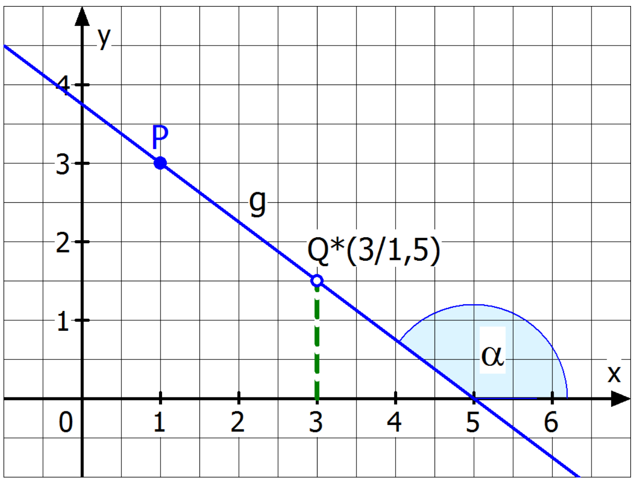
a) Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \text{mit } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{0-3}{5-1}(x-5) + 0$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$\underline{g:\ y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}}$$




b) Neigungswinkel $\alpha$:

$$\tan\alpha = m$$

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = -36{,}87^\circ \text{ bzw.}$$

$$\underline{\alpha = 143{,}13^\circ}$$

c) Läge der Punkt Q* genau auf der Geraden g, würde gelten:

$$g: y_{Q^*} = -\frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4} \qquad \text{mit } x = 3$$

$$y_{Q^*} = -\frac{3}{4} \cdot 3 + 3\frac{3}{4}$$

$$y_{Q^*} = 1\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{Q^*\left(3 \middle| 1\frac{1}{2}\right)}$$

Somit liegen alle Punkte $Q(3|q)$ unterhalb der Geraden g für die $\underline{q < 1\frac{1}{2}}$ ist.

# - Lösungen -

**27.** a) <u>Parallelenschar</u>

- Steigung aller Geraden ist gleich
- y - Achsenabschnitt ist variabel

$\Rightarrow\ f_t(x) = -\frac{2}{3}x + t$

b) <u>Geradenbüschel</u>

- Steigung der Geraden ist variabel
- y - Achsenabschnitt ist für alle Geraden gleich

$\Rightarrow\ f_m(x) = m\,x + 1$

**28.** Gegeben: $P(4\,|\,1)$ und $f_m(x) = (m-1)x + 2m$; $\quad m \in \mathbb{R}$

a) Liegt der Punkt auf einer Geraden der Funktionenschar, so muss er die Funktionsgleichung erfüllen:

$$f_m(x) = (m-1)x + 2m \qquad \big|\ P(4\,|\,1) \text{ einsetzen}$$

$$1 = (m-1)\cdot 4 + 2m$$

$$1 = 4m - 4 + 2m$$

$$\underline{m = \frac{5}{6}}$$

$$f_{\frac{5}{6}}(x) = \left(\frac{5}{6} - 1\right)x + 2\cdot\frac{5}{6}$$

$$g:\ \underline{\underline{y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{2}{3}}}$$

b) $h:\ y = -2x + 8$

Steigung von $h(x)$: $m_h = -2$

Steigung von $f_m(x)$: $m_f = m - 1$

Für die Steigungen der senkrecht aufeinander stehenden Geraden gilt:

$$m_h \cdot m_f = -1$$

$$-2\cdot(m-1) = -1 \qquad \big|\ :(-2)$$

$$m - 1 = 0{,}5$$

$$\underline{m = 1{,}5}$$

$$\Rightarrow\ f_m(x) = (m-1)x + 2m \qquad \big|\ m = 1{,}5 \text{ einsetzen}$$

$$f_{1,5}(x) = (1{,}5 - 1)x + 2\cdot 1{,}5$$

$$\underline{\underline{f_{1,5}(x) = 0{,}5x + 3}}$$

# - Lösungen -

c) Schnittpunkt $S_x$ mit der x-Achse ($y = 0$):

$$f_m(x) = (m-1)x + 2m$$
$$0 = (m-1)x + 2m$$
$$-(m-1)x = 2m$$
$$\underline{x = -\frac{2m}{m-1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_x\left(-\frac{2m}{m-1} \middle| 0\right)} \quad \text{mit } m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Schnittpunkt $S_y$ mit der y-Achse ($x = 0$):

$$f_m(x) = (m-1)x + 2m$$
$$y = (m-1)\cdot 0 + 2m$$
$$\underline{y = 2m} \quad \Rightarrow \quad \underline{S_y(0|2m)}$$

d) $\underline{f_m(x) = (m-1)x + 2m}$

Zwei Werte für m wählen $\Rightarrow$ $m_1, m_2$ mit $m_1 \neq m_2$ und jeweils in die Ausgangsgleichung einsetzen; damit den Schnittpunkt bestimmen:

$$f_{m1}(x) = (m_1 - 1)x + 2m_1 \qquad \text{(Gl.1)}$$
$$\underline{f_{m2}(x) = (m_2 - 1)x + 2m_2 \qquad \text{(Gl.2)}}$$

Gl.1 = Gl.2:

$$(m_1 - 1)x + 2m_1 = (m_2 - 1)x + 2m_2$$
$$m_1 \cdot x - x + 2m_1 = m_2 \cdot x - x + 2m_2$$
$$m_1 \cdot x - m_2 \cdot x = 2m_2 - 2m_1$$
$$x(m_1 - m_2) = -2(m_1 - m_2) \quad \Big| : (m_1 - m_2)$$
$$\underline{x = -2}$$

$x = -2$ einsetzen in die Ausgangsgleichung:

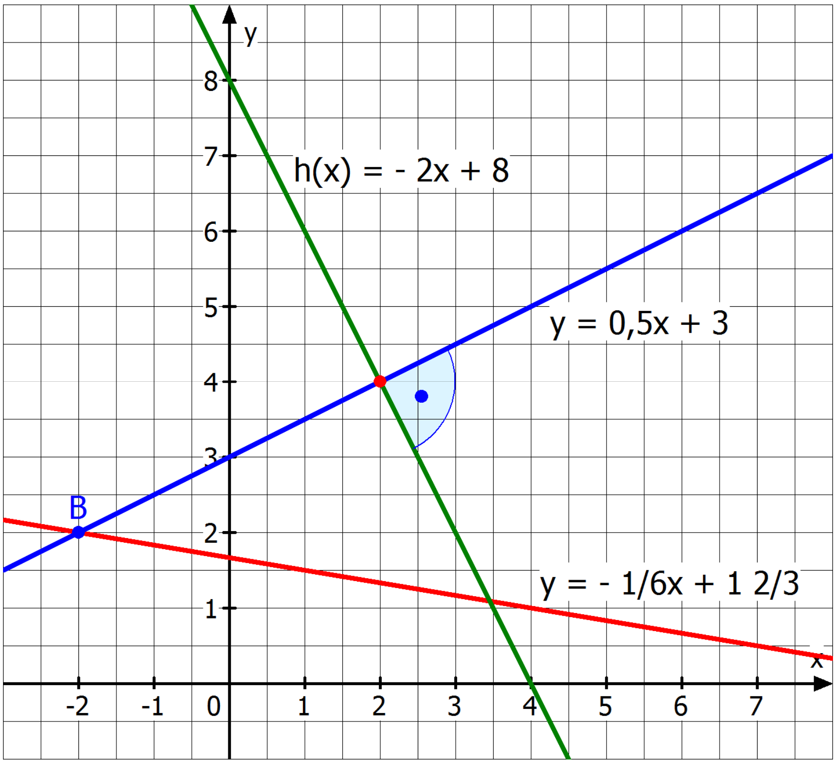
$$f_m(x) = (m-1)x + 2m$$
$$f_m(-2) = (m-1)\cdot(-2) + 2m$$
$$f_m(-2) = -2m + 2 + 2m$$
$$\underline{y = 2}$$

Der gemeinsame Schnittpunkt (Büschelpunkt) aller Schargeraden ist unabhängig von m:

$\underline{B(-2|2)}$

# - Lösungen -

e) Zeichnung mit den Geraden aus a) und b)




**29.** Gegeben: $P(1|-3)$ und $g_k: y = (2k-1)x + k;\quad k \in \mathbb{R}$

a) Liegt der Punkt auf einer Geraden der Funktionenschar, so muss er die Funktionsgleichung erfüllen:

$$y = (2k-1)x + k \qquad \big|\, P(1|-3) \text{ einsetzen}$$

$$-3 = (2k-1)\cdot 1 + k$$

$$-3 = 3k - 1$$

$$\underline{k = -\frac{2}{3}} \qquad \Rightarrow \text{ einsetzen in die Schargleichung}$$

$$y = (2k-1)x + k$$

$$y = \left(2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right)x - \frac{2}{3}$$

$$g:\ \underline{\underline{y = -2\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}}$$

b) Parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten muss die Steigung der Geraden $m = 1$ sein:

$$2k - 1 = 1$$

$$\underline{\underline{k = 1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{y = x + 1}$$

c) Schnittpunkt $S_x$ mit der x-Achse ($y = 0$):

$$y = (2k-1)x + k$$
$$0 = (2k-1)x + k$$
$$-(2k-1)x = k$$
$$\underline{x = -\frac{k}{2k-1}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_x\left(-\frac{k}{2k-1}\middle|\,0\right)}} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}$$

Schnittpunkt $S_y$ mit der y-Achse ($x = 0$):

$$y = (2k-1)\cdot 0 + k$$
$$\underline{y = k} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_y(0\,|\,k)}}$$

d) Ausgangsgleichung: $\underline{g_k(x) = (2k-1)x + k}$

Zwei Werte für k wählen $\Rightarrow$ $k_1, k_2$ mit $k_1 \neq k_2$ und jeweils in die Ausgangsgleichung einsetzen; damit den Schnittpunkt bestimmen:

$$g_{k1}(x) = (2k_1-1)x + k_1 \qquad \text{(Gl.1)}$$
$$\underline{g_{k2}(x) = (2k_2-1)x + k_2 \qquad \text{(Gl.2)}}$$

Gl.1 = Gl.2:

$$(2k_1-1)x + k_1 = (2k_2-1)x + k_2$$
$$2k_1 \cdot x - x + k_1 = 2k_2 \cdot x - x + k_2$$
$$2k_1 \cdot x - 2k_2 \cdot x = k_2 - k_1$$
$$2x(k_1 - k_2) = -(k_1 - k_2) \qquad |:(k_1 - k_2)$$
$$\underline{\underline{x = -0{,}5}}$$

$x = -0{,}5$ einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$y(x) = (2k-1)x + k$$
$$y(-0{,}5) = (2k-1)\cdot(-0{,}5) + k$$
$$y(-0{,}5) = -k + 0{,}5 + k$$
$$\underline{\underline{y(-0{,}5) = 0{,}5}}$$

Der gemeinsame Schnittpunkt (Büschelpunkt) aller Schargeraden ist unabhängig von k:

$$\underline{\underline{B(-0{,}5\,|\,0{,}5)}}$$

# - Lösungen -

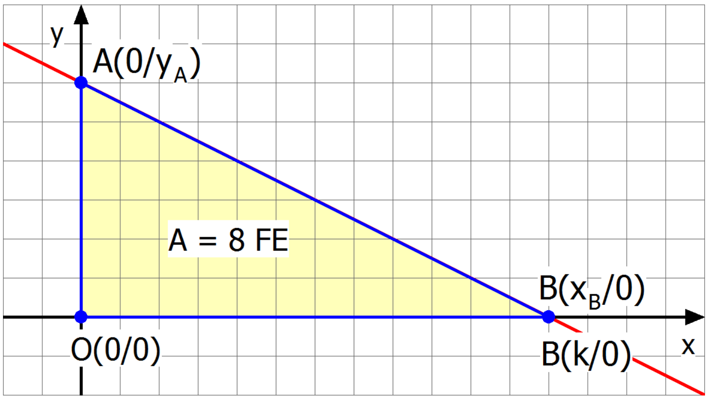
**30.** Die Eckpunkte des Dreiecks sind: $A(0|y_A)$, $B(x_B|0)$ und $O(0|0)$.

Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot x_B \cdot y_A \quad \Big| \, A_\Delta = 8$$

$$8 = \frac{1}{2} \cdot x_B \cdot y_A$$

$$\underline{16 = x_B \cdot y_A}$$




Weil $y_A$ der y-Achsenabschnitt t der Schargeraden ist, kann man auch schreiben:

$$16 = x_B \cdot t$$

$$\underline{t = \frac{16}{x_B}}$$

Für die Steigung m der Schargeraden erhält man:

$$\underline{m = -\frac{t}{x_B}}$$

Ergibt zusammengefasst:

$$\underline{m = -\frac{t}{x_B} = -\frac{16}{x_B^{\,2}}}$$

Einsetzen in die Geradengleichung: $f(x) = mx + t$

$$\underline{f(x) = -\frac{16}{x_B^{\,2}} \cdot x + \frac{16}{x_B}}$$

Statt $x_B$ kann man die Variable auch k nennen. Damit erhält man:

$$\underline{\underline{f_k(x) = -\frac{16}{k^2} \cdot x + \frac{16}{k}}}$$

# - Lösungen -

**31.** In die Geradengleichung $2x - \frac{1}{3}y + 6 = 0$ jeweils einsetzen:

$P_1\left(\frac{2}{3}\middle|7{,}5\right) \Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 7{,}5 + 6 = 0$$
$$\frac{4}{3} - \frac{7{,}5}{3} + 6 = 0$$
$$\frac{8}{6} - \frac{15}{6} + \frac{36}{6} = 0$$
$$\underline{\frac{29}{6} = 0 \quad (f)}$$

$P_2\left(\frac{1}{3}\middle|20\right) \Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 20 + 6 = 0$$
$$\frac{2}{3} - \frac{20}{3} + \frac{18}{3} = 0$$
$$\underline{0 = 0 \quad (w)}$$

$P_1$ liegt <u>nicht</u> auf der gegebenen Geraden.

**32.** Weil die Höhe $h_{[AB]}$ mit der Geraden g zusammenfällt, steht die Dreiecksbasis [AB] auf der Geraden g senkrecht. Somit gilt für die Steigungen der Geraden g und $\overline{AB}$:

$$m_g \cdot m_{[AB]} = -1$$
$$(-2) \cdot m_{[AB]} = -1$$
$$\underline{m_{[AB]} = \frac{1}{2}}$$

Gerade $\overline{AB}$ (Punkt-Steigungsform):

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \Big| \; A(2|1) \text{ und } m = \frac{1}{2} \text{ einsetzen}$$
$$y = \frac{1}{2}(x-2) + 1$$
$$g_{[AB]}: \underline{y = \frac{1}{2}x}$$

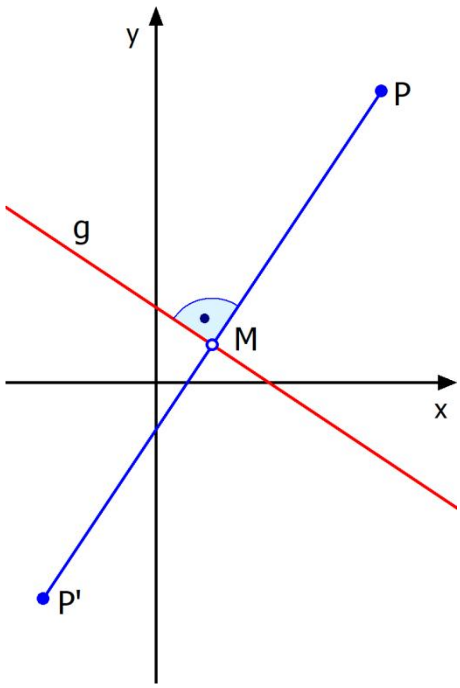
H ist der Schnittpunkt der Geraden g mit $\overline{AB}$ $\left(g \cap g_{[AB]} = \{H\}\right)$:

$$\begin{array}{|l} y = -2x + 12{,}5 \\ \wedge\; y = \frac{1}{2}x \end{array}$$

$$-2x + 12{,}5 = \frac{1}{2}x$$
$$-2{,}5x = -12{,}5$$
$$\underline{x = 5} \quad \text{einsetzen in } y = \frac{1}{2}x:$$
$$\underline{y = 2{,}5}$$
$$\underline{\underline{H(5|2{,}5)}}$$

# - Lösungen -

**33.** Gegeben: g mit $y + \frac{2}{3}x - 4 = 0$ und $P(12|15{,}5)$.




Bei dieser Achsenspiegelung steht die Gerade $\overline{PP'}$ senkrecht auf der Spiegelachse g. Für ihre Steigungen gilt:

$m_{[PP']} = -\frac{1}{m_g}$ mit $g: y = -\frac{2}{3}x + 4$

$\underline{m_{[PP']} = \frac{3}{2} = 1{,}5}$

Geradengleichung für $\overline{PP'}$ (Punkt-Steigungsform):

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$m = 1{,}5$ und $P(12|15{,}5)$ einsetzen

$$y = 1{,}5(x - 12) + 15{,}5$$

$\overline{PP'}$: $\underline{y = 1{,}5x - 2{,}5}$

Die Strecke $\overline{PP'}$ wird durch die Gerade g im Punkt M halbiert.
Bestimmung der Koordinaten von M:

$$\left| \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ \wedge\ y = 1{,}5x - 2{,}5 \end{array} \right.$$

$$-\frac{2}{3}x + 4 = 1{,}5x - 2{,}5$$

$$-\frac{2}{3}x - 1{,}5x = -2{,}5 - 4$$

$$-\frac{13}{6}x = -6{,}5 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{6}{13}\right)$$

$$\underline{x = 3}$$

$x = 3$ eingesetzt in $y = 1{,}5x - 2{,}5$:

$$y = 1{,}5 \cdot 3 - 2{,}5$$

$$\underline{y = 2}$$

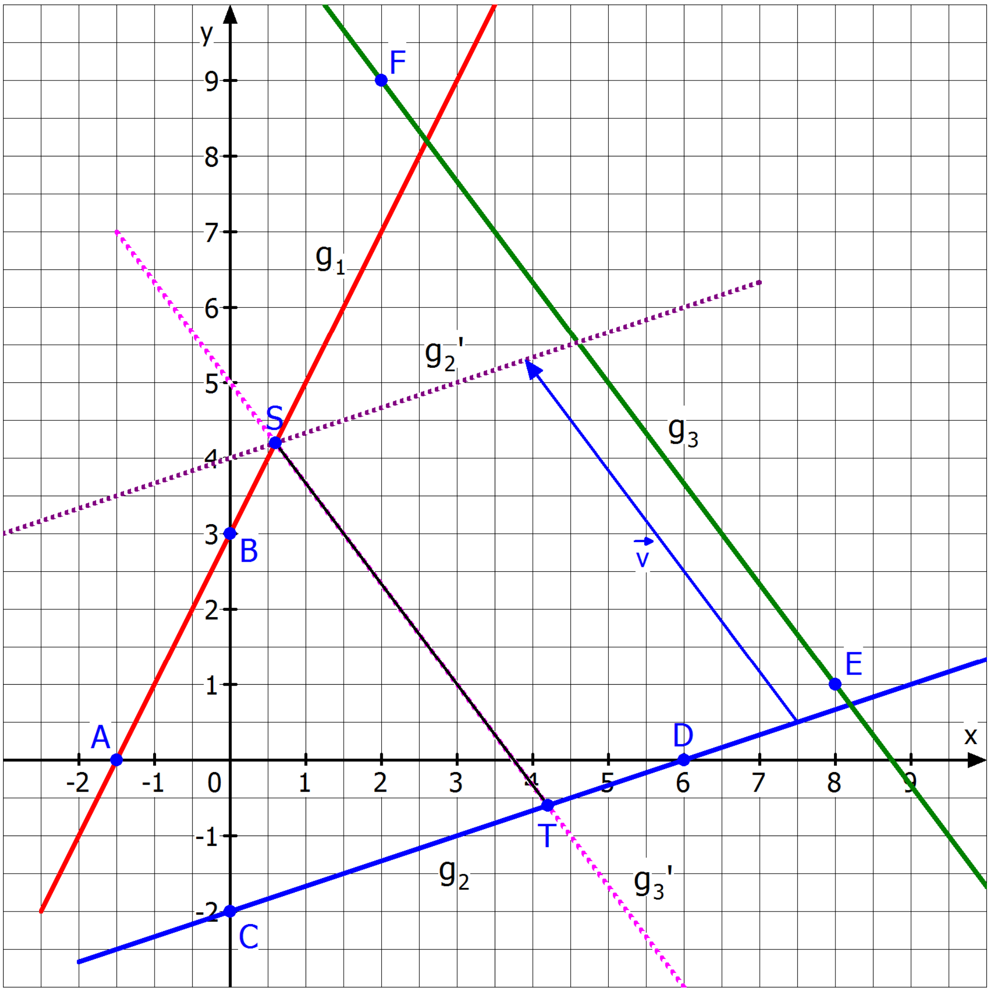
$$\underline{\underline{M(3|2)}}$$

Der Bildpunkt P‘ kann nun durch Vektorvergleich ermittelt werden: $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{PM}$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-12 \\ 2-15{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x-3 = -9 \\ y-2 = -13{,}5 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -11{,}5 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{P'(-6|-11{,}5)}}$$

# - Lösungen -

**34.** Die Geraden $g_1 = \overline{AB}$ mit $A(-1{,}5|0)$ und $B(0|3)$ sowie $g_2 = \overline{CD}$ mit $C(0|-2)$ und $D(6|0)$ als auch $g_3 = \overline{EF}$ mit $E(8|1)$ und $F(2|9)$ sind gegeben.




Ermitteln der Geradengleichungen - Punkt-Steigungsform $y = m(x - x_1) + y_1$:

$$m_{[AB]} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-0}{0+1{,}5} = 2 \quad \Rightarrow \quad g_1 : \underline{y = 2x + 3}$$

$$m_{[CD]} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0+2}{6-0} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad g_2 : \underline{y = \frac{1}{3}x - 2}$$

$$m_{[EF]} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{9-1}{2-8} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad g_3 : \underline{y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{3}}$$

# - Lösungen -

Die Gerade $g_2$ wird mit dem Vektor $\vec{v}$ parallel verschoben. Die Bildgerade $g_2'$ schneidet $g_1$ in S.

Der Vektor $\vec{v}$ ist 6 cm lang, seine Richtung ist parallel zu $g_3$. Wegen dieser Parallelität verhalten sich die x- und y-Komponente von $\vec{v}$ wie die Steigung von $g_3$:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \Big| \quad \left|\vec{v}\right| = 6 \text{ und } \frac{v_y}{v_x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow v_y = -\frac{4}{3}v_x$$

$$|6| = \sqrt{v_x^2 + \left(-\frac{4}{3}v_x\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}v_x^2}$$

$$6 = -\frac{5}{3}v_x$$

$$\underline{v_x = -3{,}6} \quad \Rightarrow \quad \underline{v_y = -\frac{4}{3}\cdot(-3{,}6) = 4{,}8} \qquad \underline{\underline{\vec{v} = \begin{pmatrix} -3{,}6 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}}}$$

Bestimmung der Parallelen $g_2'$:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3}x - 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3{,}6 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} x' = x - 3{,}6 \\ \wedge\ y' = \frac{1}{3}x + 2{,}8 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = x' + 3{,}6 \\ \wedge\ y' = \frac{1}{3}x + 2{,}8 \end{array}\right. \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x' + 3{,}6) + 2{,}8$$

$$g_2': \underline{\underline{y = \frac{1}{3}x + 4}}$$

Der Punkt S ist Schnittpunkt von $g_2'$ mit $g_1$:

$$\left|\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + 4 \\ \wedge\ y = 2x + 3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}x + 4 = 2x + 3$$

$$-\frac{5}{3}x = -1$$

$$\underline{x = 0{,}6}$$

$x = 0{,}6$ eingesetzt in $g_1$:

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2\cdot 0{,}6 + 3$$

$$\underline{y = 4{,}2} \qquad \underline{\underline{S(0{,}6\,|\,4{,}2)}}$$

Mit $\overrightarrow{TS}$ kann $T(x_T\,|\,y_T)$ bestimmt werden:

$$\overrightarrow{TS} = \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 - x_T \\ 4{,}2 - y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}6 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

$$x_T = 4{,}2$$

$$\underline{y_T = -0{,}6} \qquad \underline{\underline{T(4{,}2\,|\,-0{,}6)}}$$

# - Lösungen -

**35.** a) Für die Steigung der Geraden gilt:

$m = \tan\alpha$

$m = \tan 60°$

$\underline{m = \sqrt{3}}$ (Formelsammlung)

Punkt-Steigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$m = \sqrt{3}$ und $P(-4 \mid 0{,}5)$ einsetzen

$$y = \sqrt{3}(x + 4) + 0{,}5$$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3} + 0{,}5}}$$

b) Schnittpunkt mit der x-Achse ($y = 0$):

$$0 = \sqrt{3}\,x + 4\sqrt{3} + 0{,}5$$

$$\sqrt{3}\,x = -4\sqrt{3} - 0{,}5$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3} - 0{,}5}{\sqrt{3}} = -4 - \frac{0{,}5}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{x = -4 - \frac{1}{6}\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_x\left(-4 - \frac{1}{6}\sqrt{3} \,\middle|\, 0\right)}}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse ($x = 0$):

$$y = \sqrt{3} \cdot 0 + 4\sqrt{3} + 0{,}5$$

$$\underline{y = 4\sqrt{3} + 0{,}5}$$

$$\underline{\underline{S_y\left(0 \,\middle|\, 4\sqrt{3} + 0{,}5\right)}}$$

c) Unter einer „Nullstelle“ versteht man den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse ($y = 0$).

Punkt-Steigungsform:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$m = -\frac{1}{5}$ und $S_x\left(-4 - \frac{1}{6}\sqrt{3} \,\middle|\, 0\right)$ einsetzen

$$y = -\frac{1}{5}\left(x - \left(-4 - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)\right) + 0$$

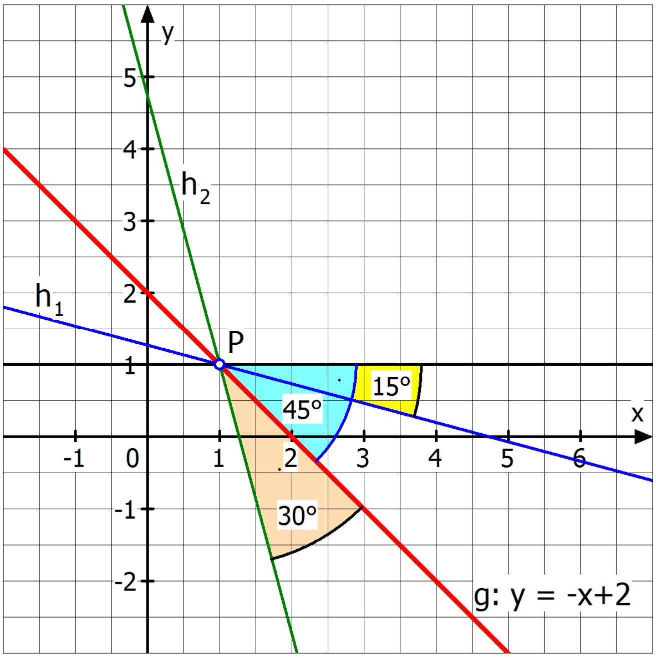
$$y = -\frac{1}{5}\left(x + 4 + \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$$

$$h:\ \underline{\underline{y = -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} - \frac{1}{30}\sqrt{3}}}$$

# - Lösungen -

**36.** Die Steigung der Geraden $g:\ y = -x + 2$ ist $-1$
Der Winkel zur Waagerechten beträgt somit $-45°$ bzw. $135°$.

Weil die gesuchten Geraden h im Punkt P jeweils 30° zu g gedreht sind, sind deren Winkel zur Waagerechten $-15°\left(-45° + 30°\right)$ bzw. $-75°\left(-45° - 30°\right)$ :




$h_1:\ m = \tan\left(-15°\right)$

$\underline{m = -0{,}268}$

allg. Geradengleichung: $y = mx + t$

$m = -0{,}268$ und $P\left(1 \mid 1\right)$ einsetzen:

$1 = -0{,}268 \cdot 1 + t$

$t = 1 + 0{,}268$

$\underline{t = 1{,}268}$

$h_1:\ \underline{y = -0{,}268x + 1{,}268}$

$h_2:\ m = \tan\left(-75°\right)$

$\underline{m = -3{,}732}$

allg. Geradengleichung: $y = mx + t$

$m = -3{,}732$ und $P\left(1 \mid 1\right)$ einsetzen:

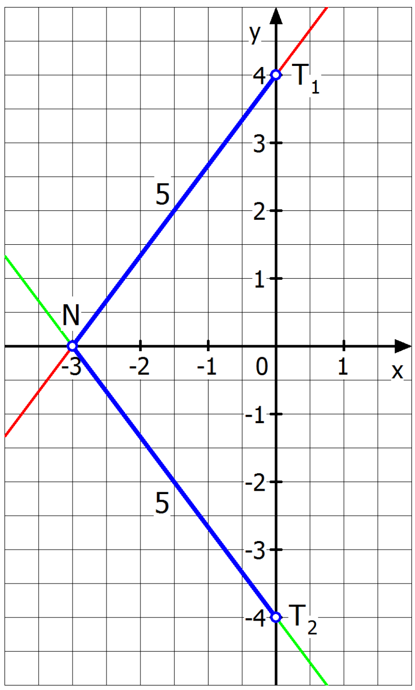
$1 = -3{,}732 \cdot 1 + t$

$t = 1 + 3{,}732$

$\underline{t = 4{,}732}$

$h_2:\ \underline{y = -3{,}732x + 4{,}732}$

**37.** Der andere Achsenabschnittspunkt T befindet sich auf der y-Achse. Es gibt dafür die zwei Möglichkeiten $T_1$ bzw. $T_2$ (vgl. Skizze).




Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$3^2 + y_T^2 = 5^2$

$y_T = \sqrt{16}$

$\underline{y_T = \pm 4}$

$\underline{T_1\left(0 \mid 4\right)}$ ; $\underline{T_2\left(0 \mid -4\right)}$

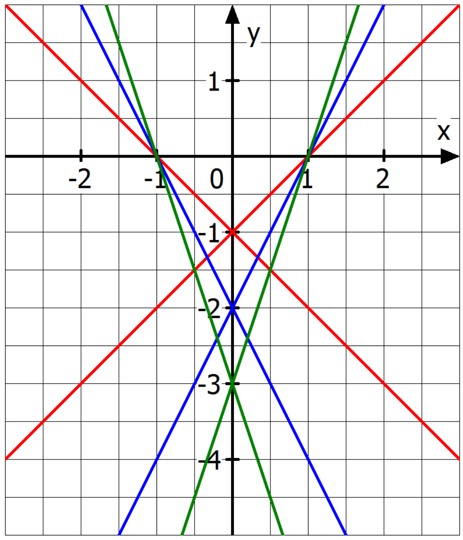
Geradengleichungen:

$g_1:\ \underline{y = \frac{4}{3}x + 4}$ $\qquad g_2:\ \underline{y = -\frac{4}{3}x - 4}$

# - Lösungen -

**38.** Gegeben ist die Scharfunktion

$f_t(x) = tx - |t|; \quad t \in \mathbb{R}; \quad D_f = \mathbb{R}$




a) Betragsfreie Funktionsgleichung:

$$f_t(x) = \begin{cases} tx - t & \text{für } t > 0 \\ tx + t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Damit erhält man die Nullstellen:

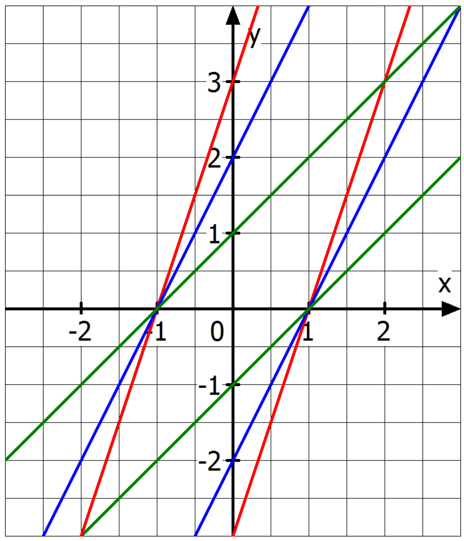
| | |
|---|---|
| $0 = tx - t \quad \vert :t$ | $0 = tx + t \quad \vert :t$ |
| $0 = x - 1$ | $0 = x + 1$ |
| $\underline{x = 1}$ | $\underline{x = -1}$ |
| $\Rightarrow N(1 \vert 0)$ für $t > 0$ | $\Rightarrow N(-1 \vert 0)$ für $t < 0$ |

b) Zwei Geraden aus der Schar schneiden sich genau dann auf der y-Achse, wenn wenn der y-Achsenabschnitt $|t|$ gleich ist; also $t_1 = -t_2$.

(Schnittpunkte mit der y-Achse: $T(0 \,|\, |t|)$)

**39.** Gegeben ist die Scharfunktion

$g_a(x) = |a|x + a; \quad a \in \mathbb{R}; \quad D_g = \mathbb{R}$




a) Betragsfreie Funktionsgleichung:

$$g_a(x) = \begin{cases} ax + a & \text{für } a > 0 \\ -ax + a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Damit erhält man die Nullstellen:

| | |
|---|---|
| $ax + a = 0 \quad \vert :a$ | $-ax + a = 0 \quad \vert :a$ |
| $x + 1 = 0$ | $-x + 1 = 0$ |
| $\underline{x = -1}$ | $\underline{x = 1}$ |
| $\Rightarrow N(-1 \vert 0)$ für $a > 0$ | $\Rightarrow N(1 \vert 0)$ für $a < 0$ |

b) Zwei Geraden aus der Schar sind genau dann parallel, wenn deren Betrag von a gleich ist bzw. wenn die Steigung $|a|$ gleich ist ($a_1 = -a_2$).

# - Lösungen -

**40.** Gegeben ist die Scharfunktion $g_t(x) = -tx + t;\quad t \in \mathbb{R};\quad D_g = \mathbb{R}$

a) Gemeinsame Nullstelle $(y = 0)$ :

$$0 = tx - t \quad |:t$$

$$0 = x - 1$$

$$\underline{x = 1}$$

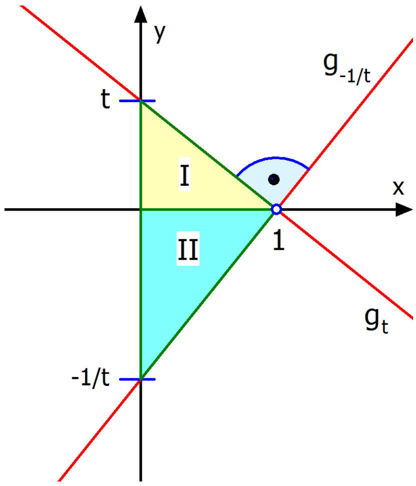
$$\Rightarrow \underline{N(1|0)} \text{ für } t \in \mathbb{R}$$

b) Stehen Geraden senkrecht aufeinander, so ist das Produkt Ihrer Steigungen:

$m_1 \cdot m_2 = -1,$

mit $m_1 = t$ erhält man

$$\underline{m_2 = -\frac{1}{t}}$$




Alle Geraden laufen durch den Punkt $N(1|0)$

Die gesuchte Dreiecksfläche kann in zwei Teilflächen zerlegt werden:

$$A_I = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |t| \qquad A_{II} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{|t|}$$

$$\underline{A_I = \frac{|t|}{2}} \qquad \underline{A_{II} = \frac{1}{2|t|}}$$

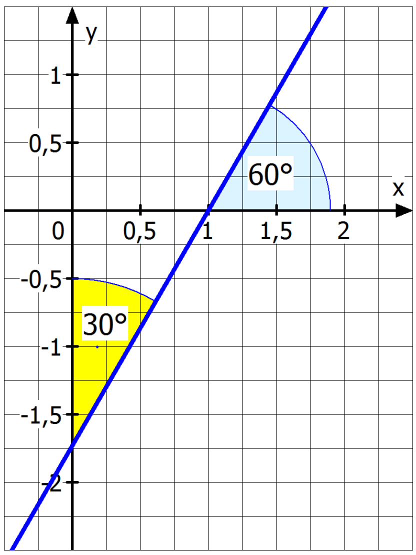
Die Betragsstriche für t sind erforderlich, weil das Dreieck auch spiegelbildlich auftreten kann und weil die untere Fläche sonst einen negativen Zahlenwert hätte.

Gesamtfläche des Dreiecks:

$$A(t) = A_I + A_{II} = \frac{|t|}{2} + \frac{1}{2|t|}$$

$$\underline{A(t) = \frac{1}{2}\left(|t| + \frac{1}{|t|}\right)}$$

c) Wegen der Winkelsumme im Dreieck ist der Winkel zwischen der x-Achse und der Geraden 60° bzw. $-60°$ bei der spiegelbildlichen Geraden




Die Steigung der Geraden beträgt somit:

$t = \tan 60°$ oder $t = \tan(-60°)$

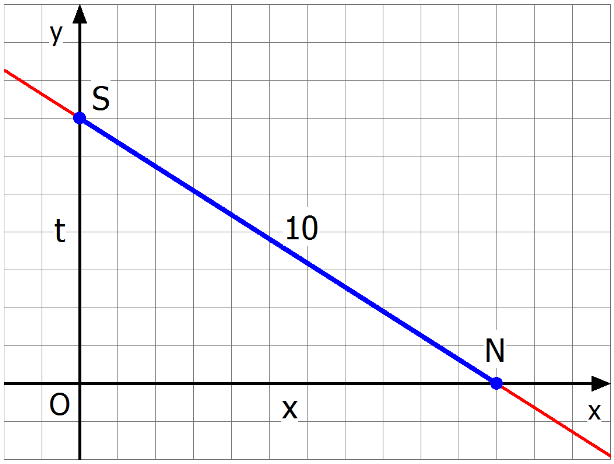
$\underline{t = \sqrt{3}}$ $\qquad \underline{t = -\sqrt{3}}$

Gleichung der Geraden:

$\underline{y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}}$ oder $\underline{y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}}$

# - Lösungen -

**41.** Die beiden Achsenschnittpunkte seien: $S(0\,|\,t)$ und $N(x\,|\,0)$.




Die Steigung der Geraden ist $m = -\frac{t}{x}$; man kann auch schreiben:

$x = -\frac{t}{m}$, bzw.

$N\left(-\frac{t}{m}\,\middle|\,0\right)$

Mit dem Satz v. Pythagoras erhält man im Dreieck ONS den Zusammenhang:

$$x^2 + t^2 = \overline{NS}^2 \quad \left|\ \overline{NS} = 10 \text{ und } x = -\frac{t}{m}\right.$$

$$\left(-\frac{t}{m}\right)^2 + t^2 = 10^2$$

$$\frac{t^2}{m^2} + t^2 = 10^2 \quad \left|\cdot m^2\right.$$

$$t^2 + t^2 \cdot m^2 = 10^2 \cdot m^2$$

$$t^2\left(1+m^2\right) = 10^2 \cdot m^2$$

$$t^2 = \frac{10^2 \cdot m^2}{1+m^2} \quad \left|\ \sqrt{\phantom{x}}\right.$$

$$\underline{t = \pm\frac{10m}{\sqrt{1+m^2}}}$$

Den y-Achsenabschnitt t einsetzen in die allg. Geradengleichung:

$$y = mx + t$$

$$f(x) = mx \pm \frac{10m}{\sqrt{1+m^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_1(x) = mx + \frac{10m}{\sqrt{1+m^2}}}}$$

$$\underline{\underline{f_2(x) = mx - \frac{10m}{\sqrt{1+m^2}}}}$$

# - Lösungen -

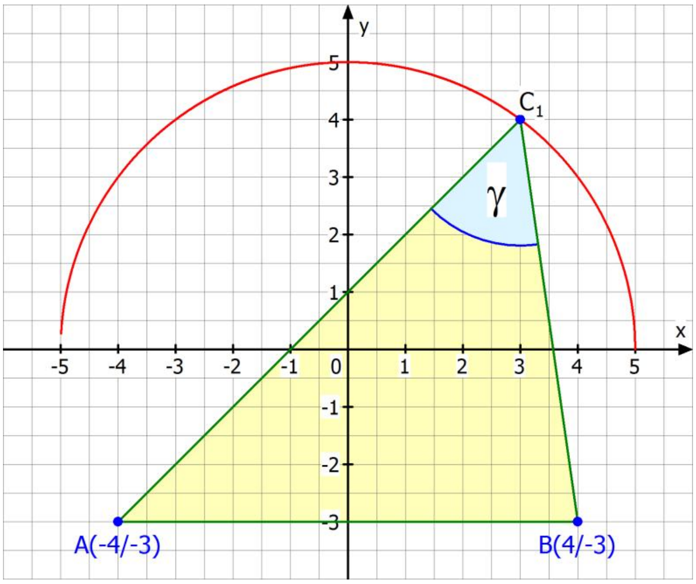
**42.** Gegeben sind die Punkte

$A(-4|-3)$

$B(4|-3)$;

$C\left(x\,\middle|\,\sqrt{25-x^2}\right)$

Definitionsmenge für x: $-5 \le x \le 5$




**Lösungsweg 1:**

Der Winkel $\gamma$ kann mit Hilfe der Vektorrechnung bestimmt werden.

Die Vektoren sind:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x & -(-4) \\ \sqrt{25-x^2} & -(-3) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x+4 \\ \sqrt{25-x^2}+3 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x & -4 \\ \sqrt{25-x^2} & -(-3) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x-4 \\ \sqrt{25-x^2}+3 \end{pmatrix}}$$

Winkel zwischen den Vektoren:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad \text{(allg. Formel)}$$

$$\cos\gamma = \frac{(x+4)\cdot(x-4) + \left(\sqrt{25-x^2}+3\right)\cdot\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)}{\sqrt{(x+4)^2 + \left(\sqrt{25-x^2}+3\right)^2} \cdot \sqrt{(x-4)^2 + \left(\sqrt{25-x^2}+3\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2 - 16 + 25 - x^2 + 6\sqrt{25-x^2} + 9}{\sqrt{x^2 + 8x + 16 + 25 - x^2 + 6\sqrt{25-x^2} + 9} \cdot \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 25 - x^2 + 6\sqrt{25-x^2} + 9}}$$

$$\cos\gamma = \frac{18 + 6\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{8x + 50 + 6\sqrt{25-x^2}} \cdot \sqrt{-8x + 50 + 6\sqrt{25-x^2}}} \quad \text{Nenner ausmultiplizieren}$$

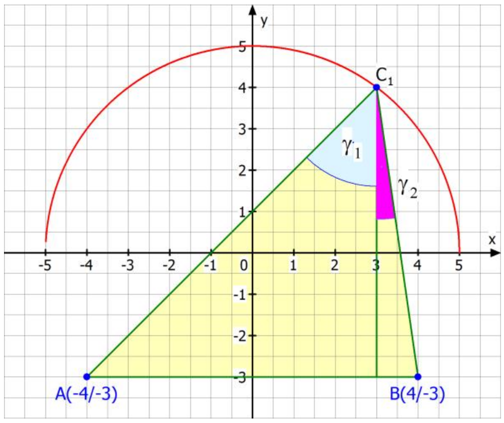
$$\cos\gamma = \frac{18 + 6\sqrt{25-x^2}}{10\sqrt{6\sqrt{25-x^2} + 34 - x^2}}$$

$$\underline{\cos\gamma = \frac{1{,}8 + 0{,}6\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{6\sqrt{25-x^2} + 34 - x^2}}}$$

Für jedes x innerhalb der Definitionsmenge erhält man denselben Winkel $\gamma = 53{,}13°$ (ohne Beweis)

## Lösungsweg 2:

Eine weitere Möglichkeit ist die Aufteilung des Dreiecks ABC in zwei Teildreiecke.
Der Winkel $\gamma$ wird zerlegt in $\gamma_1$ und $\gamma_2$:




$$\tan\gamma_1 = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A} = \frac{x-(-4)}{\sqrt{25-x^2}-(-3)} = \frac{x+4}{\sqrt{25-x^2}+3}$$

$$\tan\gamma_2 = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} = \frac{x-4}{\sqrt{25-x^2}-(-3)} = \left|\frac{x-4}{\sqrt{25-x^2}+3}\right|$$

$$\gamma = \arctan\gamma_1 + \arctan\gamma_2$$

$$\gamma = \arctan\frac{x+4}{\sqrt{25-x^2}+3} + \left|\arctan\frac{x-4}{\sqrt{25-x^2}+3}\right|$$

Die Betragsstriche sind notwendig, weil der zweite Term auch negative Werte annehmen könnte.

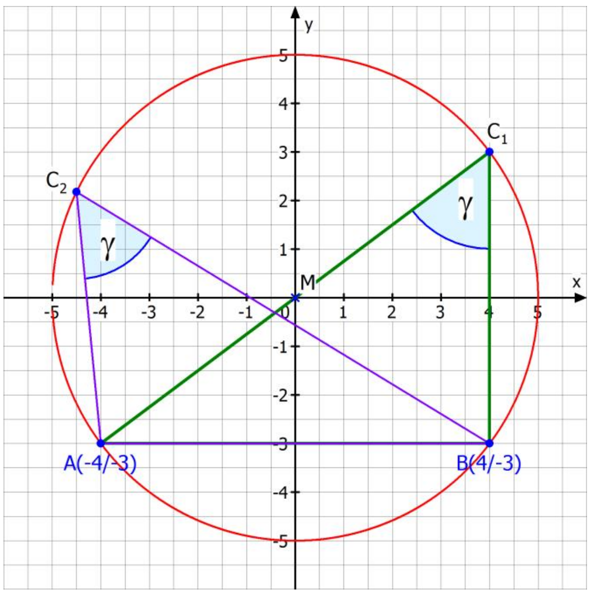
Für jedes x innerhalb der Definitionsmenge erhält man denselben Winkel $\underline{\underline{\gamma = 53{,}13°}}$ (ohne Beweis)

## Lösungsweg 3:

Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt M(0/0) und Radius $r = 5\,\text{LE}$.

Nach dem Randwinkelsatz (Umfangswinkelsatz) ist der $\sphericalangle ACB$ stets gleich und auch unabhängig von der Lage des Punktes C.

Für $x = 4$ ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck bei B. Der Winkel $\gamma$ kann über die Winkelfunktion berechnet werden:




$$\tan\gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}} = \frac{8}{6}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 53{,}13°}}$$

# - Lösungen -

**43.** a) Parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten:

$\Rightarrow\ m = 1$

$\Rightarrow\ \underline{t = 1}$

b) Für die Steigungen senkrecht aufeinander stehenden Geraden glt:

$m_1 \cdot m_2 = -1 \qquad \text{mit } m_1 = 2$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \underline{t = -\frac{1}{2}}$$

c) Wenn eine Gerade mit der x-Achse einen Winkel von 60° einschließt, ist deren Steigung

$m = \tan 60°$

$m = \underline{t = \sqrt{3}}$

d) Die Nullstellen der Funktion $(y = 0)$ :

$$0 = tx + 2\sqrt{t^2+1} \quad \big|\, -tx$$

$$-tx = 2\sqrt{t^2+1} \quad \big|\, :(-t)$$

$$\underline{x_0 = -\frac{2}{t}\sqrt{t^2+1}} \qquad \Rightarrow\ \underline{N\left(-\frac{2}{t}\sqrt{t^2+1}\,\middle|\,0\right)}$$

Wenn die Nullstelle $2\sqrt{2}$ vom Ursprung $O(0\,|\,0)$ entfernt sein soll, muss der x-Wert der Nullstelle $2\sqrt{2}$ sein:

$$-\frac{2}{t}\sqrt{t^2+1} = 2\sqrt{2} \quad \big|\text{ quadrieren}$$

$$\frac{4}{t^2}\cdot\left(t^2+1\right) = 8 \quad \big|\cdot\frac{t^2}{4}$$

$$t^2 + 1 = 2t^2 \quad \big|\, -t^2$$

$$1 = t^2$$

$$\Rightarrow\ \underline{t = 1} \vee \underline{t = -1}$$

e) Für die x-Werte der Nullstellen gilt $x_0 = -\frac{2}{t}\sqrt{t^2+1}$;

Durch Umformung erhält man: $x_0 = \pm 2\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}} = \pm 2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$.

Für sehr große Werte für t erhält man: $\lim\limits_{t\to\infty} \pm 2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \pm 2\sqrt{1} = \pm 2$

Es gibt keine Nullstellen auf der x-Achse im Bereich $\underline{-2 \le x \le 2}$

# - Lösungen -

f) Für $t = 5$ sind die Achsenschnittpunkte $(y = 0;\ x = 0)$:

$$N\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5^2+1}\ \middle|\ 0\right) \qquad \text{sowie} \qquad T\left(0\ \middle|\ 2\sqrt{5^2+1}\right)$$

$$\underline{N\left(-\frac{2}{5}\sqrt{26}\ \middle|\ 0\right)} \qquad \underline{T\left(0\ \middle|\ 2\sqrt{26}\right)}$$

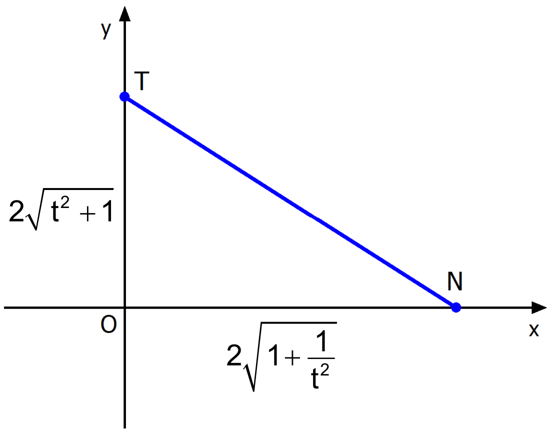
Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich der Abstand

$$\overline{NT}^2 = \left(2\sqrt{26}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{26}\right)^2$$

$$\underline{\underline{\overline{NT} = 10{,}4}}$$

g) Die Achsenschnittpunkte sind allgemein:

$$N\left(\pm 2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\ \middle|\ 0\right) \quad \text{und} \quad T\left(0\ \middle|\ 2\sqrt{t^2+1}\right)$$




Pythagoras:

$$\overline{NT}^2 = \left(2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)^2 + \left(2\sqrt{t^2+1}\right)^2$$

$$\overline{NT} = \sqrt{4\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 4\left(t^2+1\right)}$$

$$\overline{NT} = 2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}+t^2+1}$$

$$\overline{NT} = 2\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}+2} = 2\sqrt{\frac{t^4}{t^2}+\frac{1}{t^2}+2\frac{t^2}{t^2}} = 2\sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{t^2}} = 2\sqrt{\frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^2}}$$

$$\overline{NT} = \left|\, 2\cdot\frac{t^2+1}{t} \,\right|$$

$$\underline{\underline{\overline{NT} = \left|\, 2t+\frac{2}{t} \,\right|}}$$

h) $\overline{NT} = 4$

$$4 = 2t + \frac{2}{t} \qquad \left|\ \cdot\frac{t}{2}\right.$$

$$2t = t^2 + 1 \qquad |\ -2t$$

$$0 = t^2 - 2t + 1$$

$$0 = (t-1)^2$$

$$\underline{\underline{t = 1}}$$

# - Lösungen -

i) $f_t(x) = t\,x + 2\sqrt{t^2 + 1}$

Zeichnung der zu $t \in \{\ 0; \pm 0{,}2; \pm 0{,}5; \pm 1; \pm 2\ \}$ gehörenden Graphen