Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

Hinweise: Die Zeichnungen sind teilweise verkleinert dargestellt.
Alle Maße sind in mm, falls nicht anders angegeben.

1. Der Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem errechnet sich nach der Formel:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

für $A(-3/4)$ und $B(-5/-2)$ erhält man:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5+3)^2 + (-2-4)^2}\ \text{LE}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{4+36}\ \text{LE}$$

$$\underline{\underline{\overline{AB} = \sqrt{40}\ \text{LE}}}$$

2. Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten:

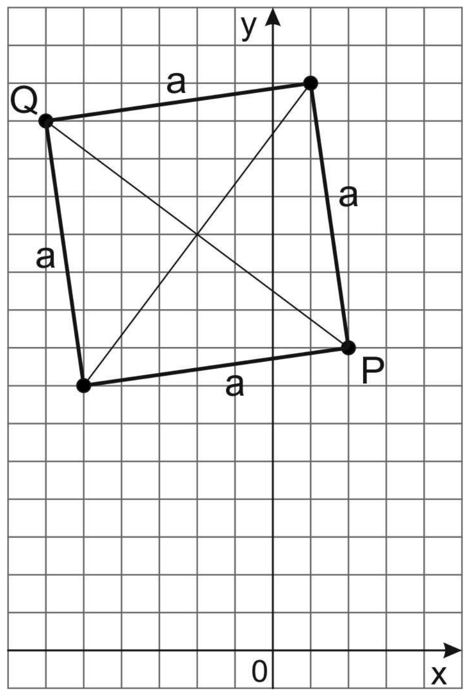
$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

für $P(1/4)$ und $Q(-3/7)$ erhält man:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1+3)^2 + (4-7)^2}\ \text{LE}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{25}\ \text{LE}$$

$$\underline{\overline{PQ} = 5\,\text{LE}}$$



Länge der Quadratseite:

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = a^2 + a^2 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$25 = 2a^2 \quad \mid :2$$

$$12{,}5 = a^2 \quad \mid \sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{a = \sqrt{12{,}5}\ \text{LE} \approx 3{,}5\,\text{LE}}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

3. a) geg.: Quadrat mit $A = 4\text{ ha} = 40\,000\text{ m}^2$

ges.: Diagonalenlänge d

Lös.: Länge der Diagonalen eines Quadrates:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{d = 200\sqrt{2}\text{ m} \approx 282{,}8\text{ m}}}$$

Seitenlänge des Quadrates:

$$A = a^2$$

$$a = \sqrt{A}$$

$$a = \sqrt{40\,000\text{ m}^2}$$

$$\underline{a = 200\text{ m}}$$

b) geg.: Quadrat mit der Diagonalenlänge $d = 8\text{ cm}$

ges.: Umfang des Quadrates

Lös.: Seitenlänge aus der Diagonalen:

$$d = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \underline{\frac{d}{2}\sqrt{2}}$$

Umfang:

$$U = 4\cdot a = 4\cdot\frac{d}{2}\sqrt{2} = 2d\sqrt{2}$$

$$U = 2\cdot 8\text{ cm}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{16\sqrt{2}\text{ cm}}}$$

4. a) $c = \overline{AB} = \sqrt{\left(3-(-2{,}5)\right)^2 + (1-5)^2} = \underline{\underline{\sqrt{46{,}25}\text{ LE}}}$

$b = \overline{AC} = \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2 + (1-2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{37}\text{ LE}}}$

b) $a = \overline{BC} = \sqrt{\left(-2{,}5-(-3)\right)^2 + (5-2)^2} = \underline{\underline{\sqrt{9{,}25}\text{ LE}}}$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\underline{9{,}25 + 37 = 46{,}25 \quad \text{(wahr)}}$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

c) Die Dreieckshöhe lässt sich über die Dreiecksfläche einfach bestimmen.

$$A_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot d = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad \Big|\cdot 2$$

$$d = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{\sqrt{9{,}25}\cdot\sqrt{37}}{\sqrt{46{,}25}} = \sqrt{7{,}4}$$

$$\underline{\underline{d \approx 2{,}72\text{ LE}}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

5. Die ursprüngliche Höhe des Mastes setzt sich zusammen aus den beiden Längen a und b (vgl. Skizze rechts). Die Teilstrecken sind:

$a = \frac{1}{4}h$ und $b = \frac{3}{4}h$.

Die ursprüngliche Masthöhe kann mit Hilfe des Pythagoras bestimmt werden:

$$b^2 = a^2 + 8^2$$

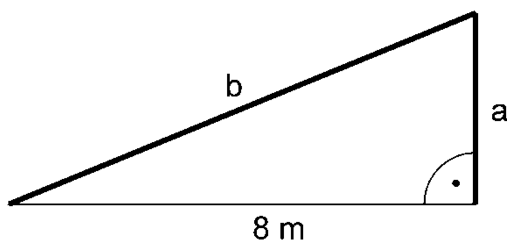
$$\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \left(\frac{1}{4}h\right)^2 + 8^2$$

$$\frac{9}{16}h^2 = \frac{1}{16}h^2 + 64$$

$$\frac{8}{16}h^2 = 64$$

$$h^2 = 128$$

$$\underline{h = 8\sqrt{2}\text{ m} \approx 11{,}3\text{ m}}$$



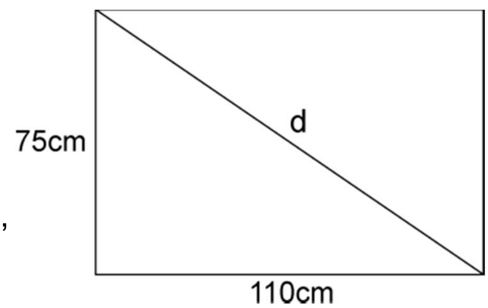
6. Es ist abzuschätzen, ob die Diagonale der Dachluke groß genug wäre, um die Platten mit der kurzen Seite (75 cm) hindurch zu schieben.

Diagonale der Dachluke:

$$d = \sqrt{110^2 + 75^2}\text{ cm}$$

$$\underline{d = 133\text{ cm}}$$

Die Dachluken-Diagonale ist 8 cm länger als die kurze Plattenseite. Somit ist zu erwarten, dass die Gipskartonplatte hindurch passt.



7. Die Sichtweite kann man sich als Tangente an den Kreis (die Erdkugel) vorstellen. Diese Tangente und der Radius stehen aufeinander senkrecht. Man erhält so ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen r, s und $(r+h)$.

Für dieses rechtwinklige Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras:

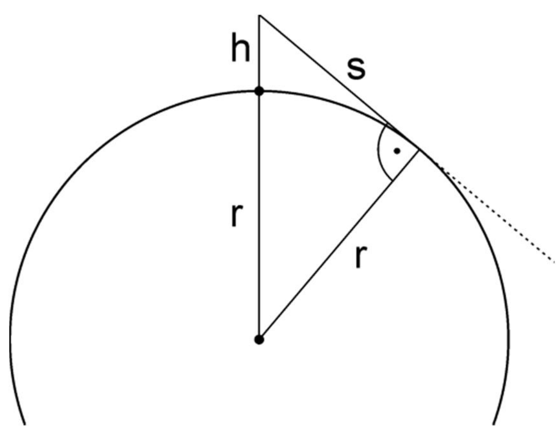
$$(r+h)^2 = r^2 + s^2$$

$$s^2 = (r+h)^2 - r^2 = r^2 + 2hr + h^2 - r^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + 2hr}$$

$$s = \sqrt{0{,}036^2 + 2 \cdot 0{,}036 \cdot 6370}\text{ km}$$

$$\underline{s \approx 21{,}4\text{ km}}$$

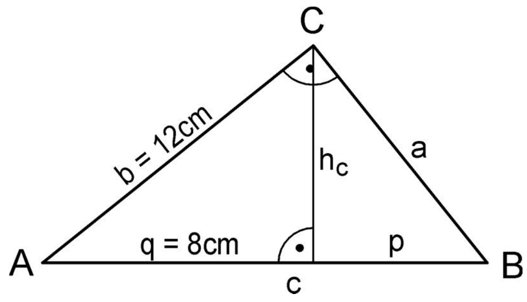


Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

8. Berechnung von c – Kathetensatz:



$b^2 = q \cdot c$

$$c = \frac{b^2}{q} = \frac{12^2}{8}\text{ cm}$$

$\underline{c = 18\text{ cm}}$

Berechnung von a – Pythagoras:

$a^2 = c^2 - b^2$

$$a = \sqrt{18^2 - 12^2} = \sqrt{180}\text{ cm}$$

$\underline{a \approx 13{,}41\text{ cm}}$

Berechnung von h_c – Pythagoras:

${h_C}^2 = b^2 - q^2$

$$h_C = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80}\text{ cm}$$

$\underline{h_C \approx 8{,}94\text{ cm}}$

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{180} \cdot 12}{2}\text{ cm}^2$$

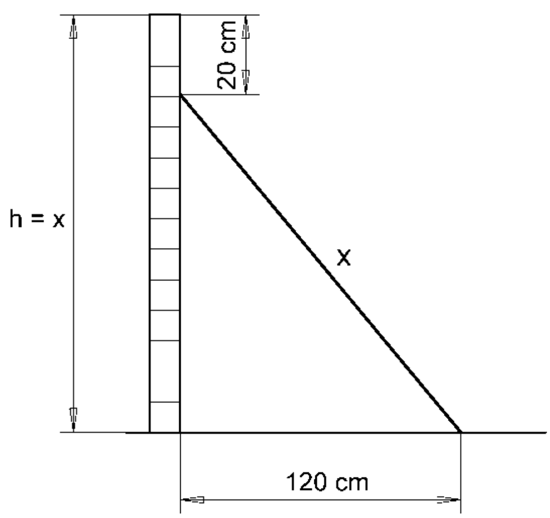
$\underline{A \approx 80{,}50\text{ cm}^2}$

Zweiter Hypotenusenabschnitt:

$p = c - q = 18\text{ cm} - 8\text{ cm}$

$\underline{p = 10\text{ cm}}$

9. a) Pythagoras:



$(x - 20\text{ cm})^2 + (120\text{ cm})^2 = x^2$

$x^2 - 40\text{ cm} \cdot x + 400\text{ cm}^2 + 14400\text{ cm}^2 = x^2$

$40\text{ cm} \cdot x = 14800\text{ cm}^2$

$\underline{x = 370\text{ cm}}$

Die Leiter ist 3,70 m lang.

Gymnasium

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

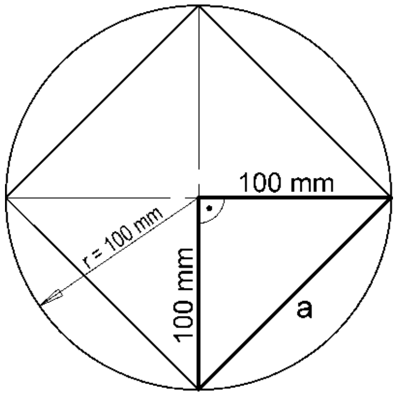
Klasse 9

- Lösungen –

b) Pythagoras:

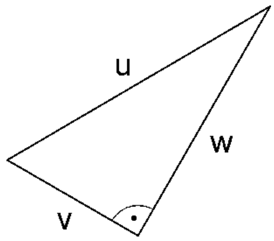
$$a^2 = (100\,\text{mm})^2 + (100\,\text{mm})^2$$
$$a^2 = 10000\,\text{mm}^2 + 10000\,\text{mm}^2$$
$$a^2 = 20000\,\text{mm}^2$$
$$\underline{a \approx 141\,\text{mm}}$$

Die Seitenlänge des Quadrates beträgt etwa 141 mm.



10. a) Gib die Seitenlänge w in Abhängigkeit von u und v an.

Lösung: $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

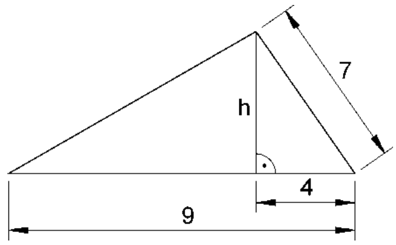


Die Lösung ist **falsch.**
Richtig muss es heißen: $w = \sqrt{u^2 - v^2}$ weil $u^2 = v^2 + w^2$

$$\underline{w^2 = u^2 - v^2}$$

b) Berechne die Länge h.

Lösung: $h = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



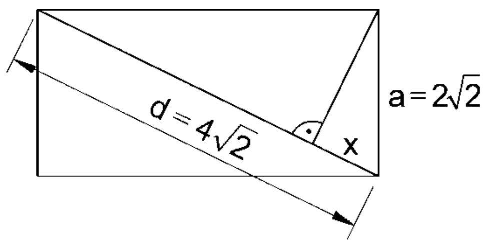
Die vorgegebene Lösung beruht auf dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q$
Um zu überprüfen ob das Maß 7 seine Richtigkeit hat, wird noch der Pythagoras im kleinen Dreieck angesetzt:

$$7^2 = h^2 + 4^2$$
$$49 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + 16$$
$$49 = 20 + 16$$
$$\underline{49 = 36 \quad \text{Widerspruch}}$$

Das Ergebnis der Überprüfung mit dem Pythagoras zeigt, dass ein Maß in der Zeichnung nicht stimmt.

c) Berechne die Länge x.

Lösung: $a^2 = x \cdot d$ Kathetensatz



$$x = \frac{a^2}{d} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Die Lösung ist **falsch.**

Richtig muss es heißen: $x = \frac{a^2}{d} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

11. a) $x^2 = p \cdot q$ ist falsch, da x nicht rechtwinklig zur Seite p+q ist.

$p + q = \sqrt{b^2 + c^2}$ ist richtig, nach Pythagoras: $(p+q)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow p + q = \sqrt{b^2 + c^2}$

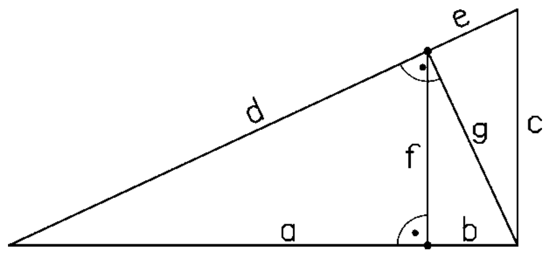
b) $d = a + b$ falsch, richtig wäre $d^2 = a^2 + b^2$.

$h^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ ist falsch, richtig wäre $h^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

12. **a)** $g^2 = b \cdot (a + b)$ (Kathetensatz)

b) $f^2 = a \cdot b$ (Höhensatz)

c) $a = \sqrt{(d+e)^2 - c^2} - b$ (Pythagoras)



c ॥ f

$$(a+b)^2 + c^2 = (d+e)^2$$

$$(a+b)^2 = (d+e)^2 - c^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$a + b = \sqrt{(d+e)^2 - c^2}$$

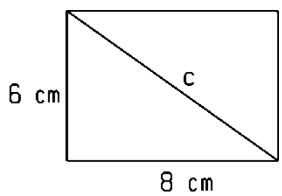
$$a = \sqrt{(d+e)^2 - c^2} - b$$

13. Diagonale c der Grundfläche:

$c^2 = (6\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2$

$c = \sqrt{100}\text{ cm}$

$c = 10\text{ cm}$

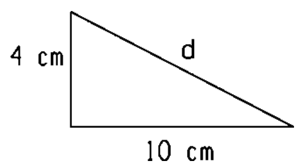


Raumdiagonale d des Quaders:

$d^2 = (4\text{ cm})^2 + (10\text{ cm})^2$

$d = \sqrt{116}\text{ cm}$

$d \approx 10{,}77\text{ cm}$



Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

14. Die Grundflächendiagonale d hat die Länge:

$d = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = a\sqrt{20}$

Die Raumdiagonale D hat die Länge:

$D = \sqrt{a^2 + 20a^2}$

$\underline{D = a\sqrt{21}}$

15. a) Es gilt:

$\overline{AB} = \sqrt{(4a)^2 + a^2} = \sqrt{16a^2 + a^2} = \underline{a\sqrt{17}}$

$\overline{AC} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \underline{a\sqrt{5}}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = \underline{a\sqrt{6}}$

b) Das Quadrat der Länge der größten Seite [AB] im Dreieck ABC ist nicht gleich der Summe der Quadrate der Längen der anderen zwei Seiten, deshalb ist das Dreieck ABC nicht rechtwinklig.

$\overline{AB}^2 \neq \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\underline{17a^2 \neq 5a^2 + 6a^2}$

16. Wir definieren folgende Längen: $d = \overline{BC}$; $e = \overline{AC}$; $f = \overline{AB}$

d ist die Diagonale einer Würfelseite;
$\Rightarrow \underline{d = a\sqrt{2}}$ (Pythagoras in einem Quadrat)

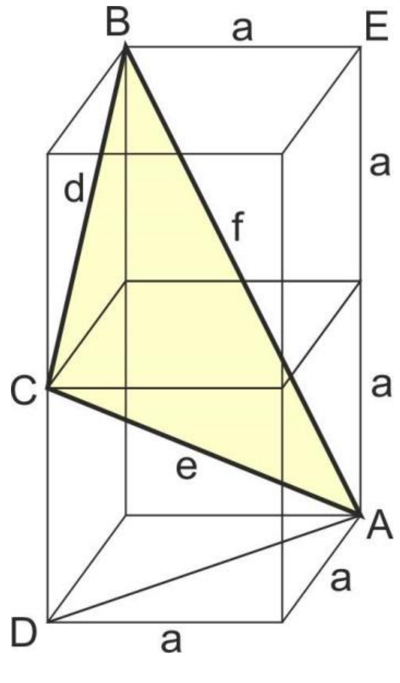
e ist die Raumdiagonale eines Würfels;

$\Rightarrow e^2 = a^2 + d^2$ Pythagoras im ΔACD

$e^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$

$e = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2}$

$\underline{e = a\sqrt{3}}$



Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

f ist die Diagonale über zwei Quadrate hinweg

$\Rightarrow f^2 = a^2 + (2a)^2$ Pythagoras im ΔAEB

$f^2 = 5a^2$

$\underline{\underline{f = a\sqrt{5}}}$

Prüfung, ob das Dreieck rechtwinklig ist.
Wir kennen nun die Längen aller drei Seiten des Dreiecks. Wenn es rechtwinklig ist muss es den Satz des Pythagoras erfüllen:

$$f^2 = d^2 + e^2$$

$$\left(a\sqrt{5}\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2$$

$$5a^2 = 2a^2 + 3a^2$$

$$\underline{5a^2 = 5a^2} \quad \text{wahr}$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

17. a) Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind gleich lang. Es gilt:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{a^2 + \left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \underline{\frac{3}{2}a}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \underline{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Das Dreieck ABC hat somit den Umfang: $U_{ABC} = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}a + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{a\left(3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}}$.

b) Für $a = 8\text{ cm}$ ist der Umfang

$$U_{ABC} = 8{,}0\text{ cm} \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx \underline{\underline{29{,}7\text{ cm}}}$$

18. Die Grundflächendiagonale d der Pyramide hat die Länge:

$$d = \sqrt{(230\text{ m})^2 + (230\text{ m})^2} = 230\sqrt{2}\text{ m}$$

Die Seitenkante s hat eine Länge von ca.

$$s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{146^2 + \left(\frac{230\sqrt{2}}{2}\right)^2}\text{ m}$$

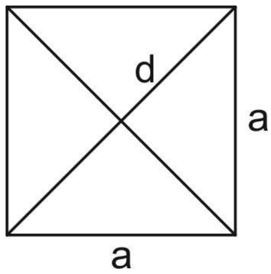
$$\underline{\underline{s \approx 218{,}6\text{ m}}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

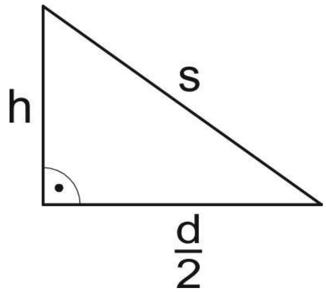
- Lösungen –

19. Diagonale d der Grundfläche - Pythagoras



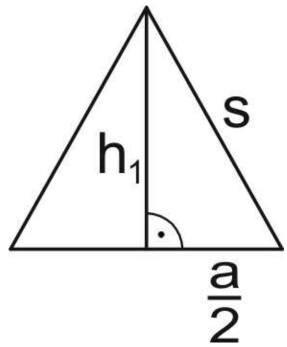
$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$d = a\sqrt{2}$$
$$\underline{d = 230\sqrt{2}\text{ m}}$$
$$\underline{\frac{d}{2} = 115\sqrt{2}\text{ m}}$$

Pyramidenhöhe h – Pythagoras



$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2$$
$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$
$$h^2 = 220^2\text{ m}^2 - \left(115\sqrt{2}\right)^2\text{ m}^2$$
$$h = \sqrt{48\,400\text{ m}^2 - 26\,450\text{ m}^2}$$
$$\underline{\underline{h = 148{,}2\text{ m}}}$$

Höhe eines Seitendreiecks – Pythagoras



$$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$$
$$h_1^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h_1^2 = 220^2\text{ m}^2 - \left(\frac{230\text{ m}}{2}\right)^2$$
$$h_1 = \sqrt{48\,400\text{ m}^2 - 13\,225\text{ m}^2}$$
$$\underline{h_1 = 187{,}55\text{ m}}$$

Fläche eines Seitendreiecks

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot a \cdot h_1$$
$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 230\text{ m}\cdot 187{,}55\text{ m}$$
$$\underline{A_\Delta = 21568{,}25\text{ m}^2}$$

Oberfläche der Pyramide

$$O = 4\cdot A_\Delta$$
$$O = 4\cdot 21568{,}25\text{ m}^2$$
$$\underline{\underline{O = 86\,273\text{ m}^2}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

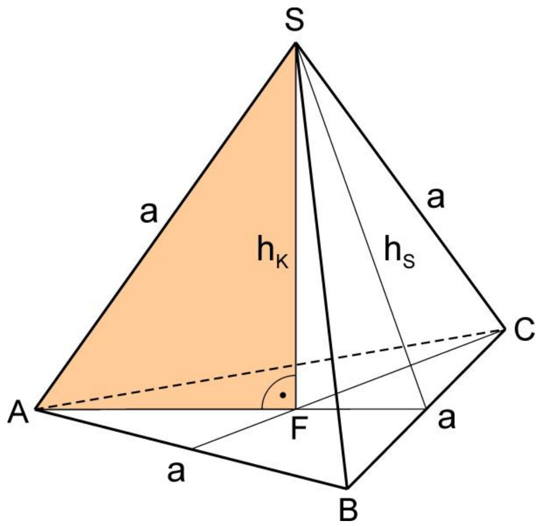
20. a) Höhe h_S der Seitenflächen - Pythagoras:

$$h_S^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\underline{h_S = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$$

b) Der Fußpunkt F der Körperhöhe h_K ist gleichzeitig der Schnittpunkt der drei Höhen der Grundfläche. Da die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist jede Höhe der Grundfläche auch gleichzeitig eine Seitenhalbierende und der Abstand vom Punkt F zu einer Ecke beträgt

$$\frac{2}{3}h_S = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$



Pythagoras im Dreieck AFS:

$$h_K^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2$$

$$h_K = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}$$

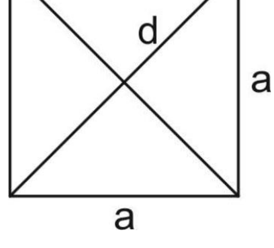
$$\underline{h_K = a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

21. Diagonale d der Grundfläche - Pythagoras

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\underline{d = a\sqrt{2}}$$

$$\underline{\frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}}$$



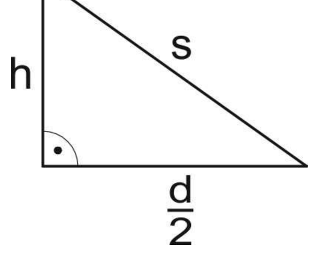
Pyramidenhöhe h - Pythagoras

$$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$\underline{h = \sqrt{s^2 - \frac{1}{2}a^2}}$$



Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

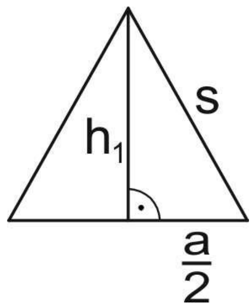
Höhe eines Seitendreiecks – Pythagoras

$$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$$

$$h_1^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_1^2 = s^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\underline{\underline{h_1 = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}a^2}}}$$



22. Die Diagonalenlänge (gegenüberliegende Kanten) des Schrankes darf nicht größer als die Kellerdecke werden.
Mit dem Satz des Pythagoras ermittelt man dann die maximale Schrankhöhe x:

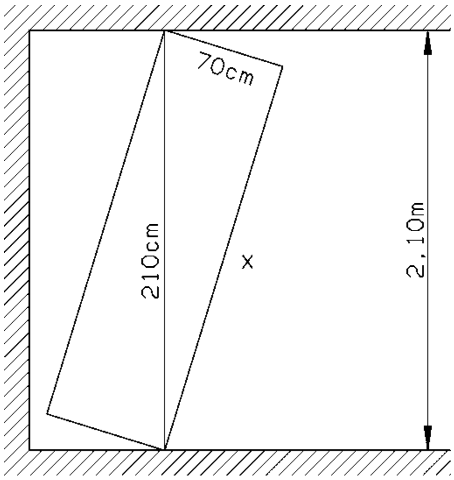
$$x^2 + (70\text{ cm})^2 = (210\text{ cm})^2$$

$$x^2 = 44100\text{ cm}^2 - 4900\text{ cm}^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{39200\text{ cm}^2}$$

$$\underline{\underline{x = 198\text{ cm}}}$$

Der Schrank darf maximal 198 cm hoch sein.



23. Entsprechend nebenstehender Zeichnung kann im kleinen rechtwinkligen Dreieck der Pythagoras angesetzt werden:

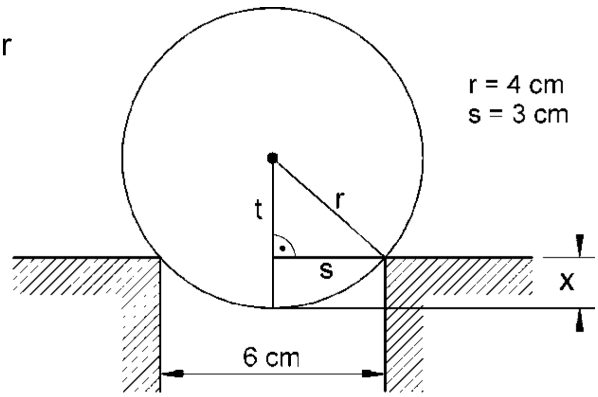
$$r^2 = s^2 + t^2$$

$$t = \sqrt{r^2 - s^2}$$

$$t = \sqrt{4^2 - 3^2}\text{ cm}$$

$$\underline{t = \sqrt{7}\text{ cm}} \qquad \Rightarrow \quad x = r - t = \left(4 - \sqrt{7}\right)\text{cm}$$

$$\underline{\underline{x \approx 1{,}35\text{ cm}}}$$



Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

24. Die Tiefe h des Abdrucks kann zwar nicht unmittelbar berechnet werden, über das Dreieck KLM lässt sich die Eindrucktiefe h jedoch (indirekt) bestimmen.

Pythagoras im ΔKLM:

$$\overline{ML}^2 = \overline{KM}^2 + \overline{KL}^2$$

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2} - h\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$5^2 = (5-h)^2 + 1{,}5^2$$

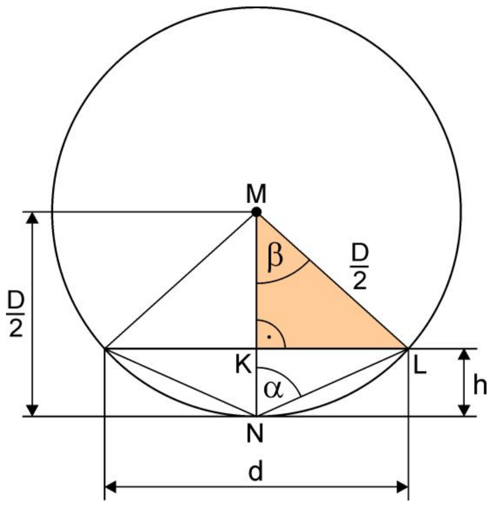
$$(5-h)^2 = 22{,}75 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$5 - h = \pm\sqrt{22{,}75}$$

$$h_{1/2} = 5 \pm 4{,}77$$

$$\underline{h_1 = 0{,}23\ \text{mm}}, \quad (h_2 = 9{,}77\ \text{mm})$$

keine Lösung, weil $h_2 > d/2$



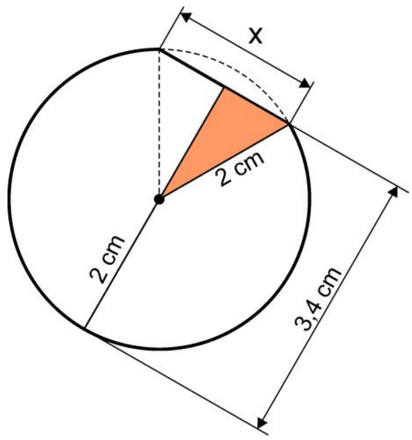
25. Nach dem Satz des Pythagoras gilt im farbig markierten Dreieck (siehe Skizze):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2^2 - (3{,}4-2)^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\frac{x}{2} = \sqrt{2^2 - (3{,}4-2)^2}$$

$$x = 2\sqrt{2{,}04}\ \text{cm}$$

$$\underline{x \approx 2{,}86\ \text{cm}}$$



26. Die beiden „mittleren“ Kreisen haben jeweils den Radius 2 cm, die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks hat die Länge $x+2$.
Die senkrechte Kathete des Dreiecks hat die Länge $4-x$ und die waagerechte Kathete hat die Länge 2.

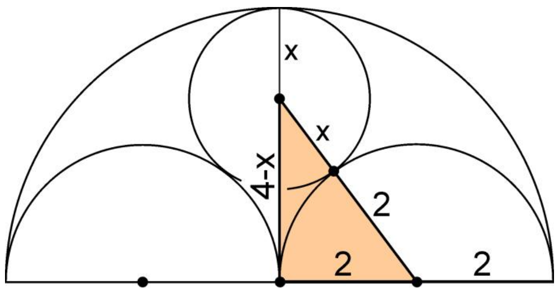
Pythagoras:

$$(4-x)^2 + 2^2 = (x+2)^2$$

$$16 - 8x + x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$20 - 8x = 4x + 4$$

$$\underline{x \quad \frac{4}{3}\ \text{cm}}$$

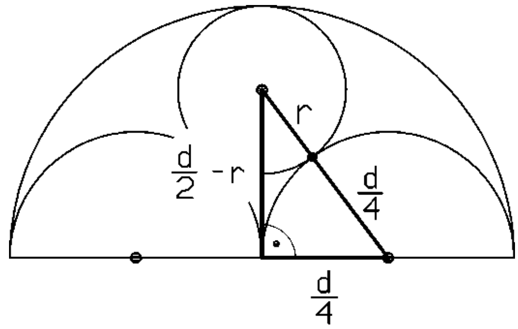


Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

27. Pythagoras:



$$\left(r+\frac{d}{4}\right)^2=\left(\frac{d}{4}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-r\right)^2$$

$$r^2+2r\frac{d}{4}+\frac{d^2}{16}=\frac{d^2}{16}+\frac{d^2}{4}-2r\frac{d}{2}+r^2$$

$$\frac{dr}{2}=\frac{d^2}{4}-dr \qquad \big|\cdot 4$$

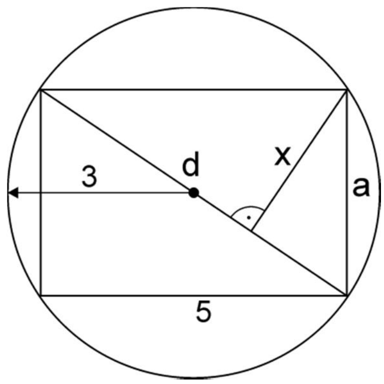
$$2dr=d^2-4dr$$

$$6dr=d^2 \qquad \big|:6d$$

$$r=\frac{d^2}{6d}$$

$$\underline{\underline{r=\frac{1}{6}d}}$$

28. Die Diagonale des Rechtecks hat die Länge $d=6$.
Die kurze Seite des Rechtecks hat die Länge
$a=\sqrt{d^2-5^2}=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$



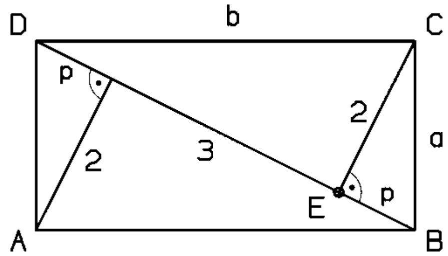
Das Rechteck wird durch die Diagonale in zwei gleich große Dreiecke geteilt; seine Fläche ist:

$$A_\Delta=\frac{5\cdot a}{2}=\frac{d\cdot x}{2} \qquad \big|\cdot 2$$

$$x=\frac{5\cdot a}{d}=\frac{5\sqrt{11}}{6}$$

$$\underline{\underline{x\approx 2{,}76}}$$

29. Höhensatz im Dreieck BCD:



$$h^2=p\cdot q$$

$$2^2=p\cdot(3+p)$$

$$4=3p+p^2$$

$$p^2+3p-4=0$$

$$p_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

$$\underline{p_1=1} \qquad (p_2=-4)$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

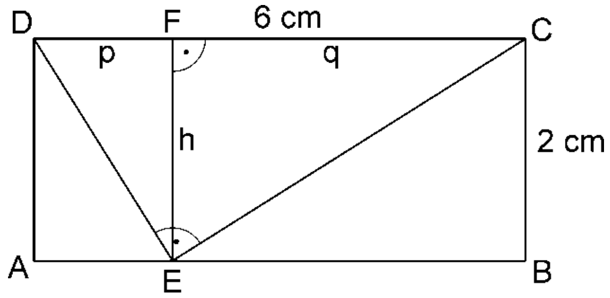
Klasse 9

- Lösungen –

Pythagoras im Dreieck DEC:

$$\overline{CD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{CE}^2$$
$$b^2 = 4^2 + 2^2$$
$$\underline{b = \sqrt{20} \approx 4{,}47}$$

30. Höhensatz im ΔCDE:



$$h^2 = p \cdot q$$
$$2^2 = p \cdot (6 - p)$$
$$4 = 6p - p^2$$
$$p^2 - 6p + 4 = 0$$
$$p_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$
$$p_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$
$$p_1 = 3 - \sqrt{5}\,; \quad p_2 = 3 + \sqrt{5}$$
$$\underline{\overline{AE} = \left(3 - \sqrt{5}\right)\text{cm}} \quad \text{oder} \quad \underline{\overline{AE} = \left(3 + \sqrt{5}\right)\text{cm}}$$

Pythagoras im ΔECF

$$\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$$
$$\overline{CE}^2 = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2 + 2^2$$
$$\overline{CE} = \sqrt{\left(3 + \sqrt{5}\right)^2 + 2^2}$$
$$\overline{CE} = \sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5 + 4} = \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$$
$$\underline{\overline{CE} = \sqrt{6\left(3 + \sqrt{5}\right)}\ \text{cm} \approx 5{,}61\,\text{cm}}$$

oder

$$\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$$
$$\overline{CE}^2 = \left(3 - \sqrt{5}\right)^2 + 2^2$$
$$\overline{CE} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2 + 2^2}$$
$$\overline{CE} = \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5 + 4} = \sqrt{18 - 6\sqrt{5}}$$
$$\underline{\overline{CE} = \sqrt{6\left(3 - \sqrt{5}\right)}\ \text{cm} \approx 2{,}14\ \text{cm}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

31. Seite k – Kathetensatz:

$$k^2 = r \cdot s$$

$$k^2 = 6\ \text{cm} \cdot 15\ \text{cm} \qquad | \sqrt{\ }$$

$$k = \sqrt{90}\ \text{cm} = \sqrt[3]{10}\ \text{cm}$$

$$\underline{k \approx 9{,}49\ \text{cm}}$$

Höhe z – Pythagoras:

$$z^2 + r^2 = k^2$$

$$z^2 = k^2 - r^2$$

$$z^2 = 90\ \text{cm}^2 - 36\ \text{cm}^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$z = \sqrt{54}\ \text{cm} = \sqrt[3]{6}\ \text{cm}$$

$$\underline{z \approx 7{,}35\ \text{cm}}$$

Seite f – Pythagoras:

$$f^2 + k^2 = s^2$$

$$f^2 = s^2 - k^2$$

$$f^2 = (15\ \text{cm})^2 - 90\ \text{cm}^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$f = \sqrt{135}\ \text{cm} = \sqrt[3]{15}\ \text{cm}$$

$$\underline{f \approx 11{,}62\ \text{cm}}$$

32.

Höhe z (Pythagoras)

$$a^2 = x^2 + z^2$$

$$z^2 = a^2 - x^2$$

$$z = \sqrt{4^2 - 2^2}\ \text{cm}$$

$$\underline{z = \sqrt{12}\ \text{cm} \approx 3{,}46\ \text{cm}}$$

Hypotenusenabschnitt y

$$y = c - x = 8\ \text{cm} - 2\ \text{cm}$$

$$\underline{y = 6\ \text{cm}}$$

Seite c (Kathetensatz)

$$a^2 = c \cdot x$$

$$c = \frac{a^2}{x} = \frac{(4\ \text{cm})^2}{2\ \text{cm}}$$

$$\underline{c = 8\ \text{cm}}$$

Seite b (Pythagoras) :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (8\ \text{cm})^2 - (4\ \text{cm})^2$$

$$\underline{b = \sqrt{48}\ \text{cm}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

33. Höhensatz im Δ ABC:

$h^2 = p \cdot q$

$p = \frac{h^2}{q} = \frac{3{,}2^2}{2{,}8}$

$p \approx 3{,}66\,\text{cm}$

Pythagoras im Δ ABF:

$c^2 = h^2 + p^2$

$c = \sqrt{h^2 + p^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 3{,}66^2}\ \text{cm}$

$c \approx 4{,}86\,\text{cm}$

34. Pythagoras im Δ AFC:

$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + h^2$

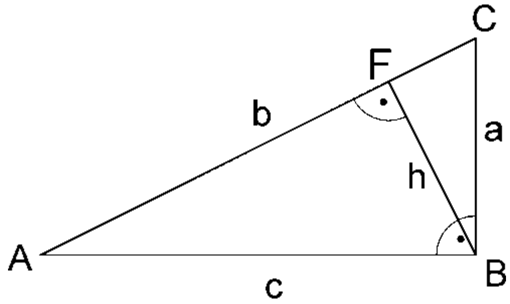
$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Für $a = 6\ \text{cm}$ ist h ca. 5,20 cm lang.

35. a) $\overline{AF} = 10\ \text{cm}$, $\overline{CF} = 4\ \text{cm}$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} = b = 14\ \text{cm}$



Berechnung von h - Höhensatz:

$h^2 = \overline{AF} \cdot \overline{CF}$

$h^2 = 10\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}$

$h = \sqrt{40}\ \text{cm} \approx 6{,}32\ \text{cm}$

Berechnung von a - Kathetensatz:

$a^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CF}$

$a^2 = 14\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm}$

$a = \sqrt{56}\ \text{cm} \approx 7{,}5\ \text{cm}$

Berechnung von c - Kathetensatz

$c^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AF}$

$c^2 = 14\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm}$

$c = \sqrt{140}\ \text{cm} \approx 11{,}8\ \text{cm}$

Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{140} \cdot \sqrt{56}\ \text{cm}^2$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7840}\ \text{cm}^2$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

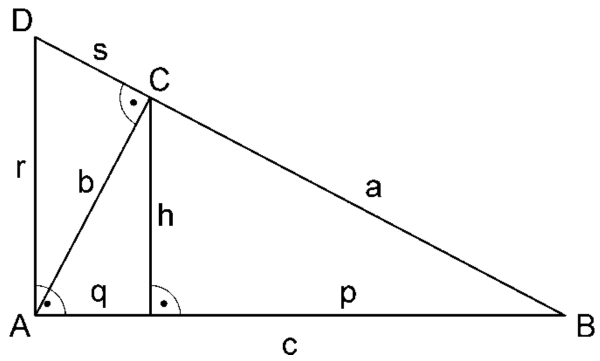
Klasse 9

- Lösungen –

$$A_{\Delta\ ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7}\ cm^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 5}\ cm^2$$

$$\underline{A_{\Delta\ ABC} = 14\sqrt{10}\ cm^2 \approx 44{,}3\ cm^2}$$

36. **Seite q:** Höhensatz im Dreieck ABC



$$h^2 = q \cdot p$$

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{36}{18}$$

$$\underline{q = 2\ cm}$$

Seite c: setzt sich zusammen aus

$$c = p + q$$

$$c = 18 + 2$$

$$\underline{c = 20\ cm}$$

Seite b: Kathetensatz im Dreieck ABC

$$b^2 = c \cdot q$$

$$b = \sqrt{c \cdot q} = \sqrt{20 \cdot 2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\underline{b \approx 6{,}3\ cm}$$

Seite a: Kathetensatz im Dreieck ABC

$$a^2 = c \cdot p$$

$$a = \sqrt{c \cdot p} = \sqrt{20 \cdot 18} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

$$\underline{a \approx 19{,}0\ cm}$$

Seite s: Höhensatz im Dreieck ABD

$$b^2 = a \cdot s$$

$$s = \frac{b^2}{a} = \frac{40}{6\sqrt{10}} = \frac{40\sqrt{10}}{60} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$\underline{s \approx 2{,}1\ cm}$$

Seite r: Satz des Pythagoras im Dreieck ACD

$$r^2 = s^2 + b^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)^2 + \sqrt{40}^2 = \frac{40}{9} + 40 = 44\frac{4}{9} \approx 44{,}4\ cm^2$$

$$r = \sqrt{44\frac{4}{9}} = 6\frac{2}{3}$$

$$\underline{r \approx 6{,}7\ cm}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

37. Berechnung von $\overline{AB}$ - Pythagoras:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$$

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{(7\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{49-36}\text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{13}\text{ cm}$$

$$\underline{\overline{AB} = 2\sqrt{13}\text{ cm} \approx 7{,}2\text{ cm}}$$

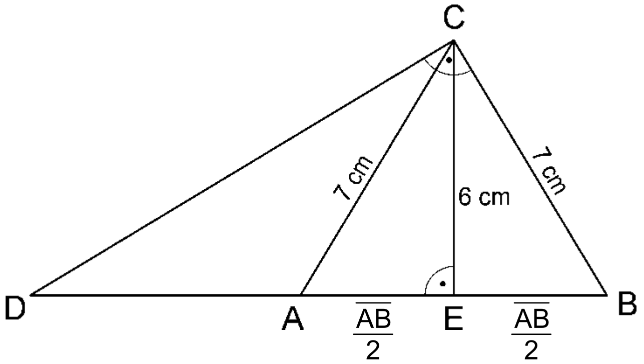
Berechnung von $\overline{DE}$ - Höhensatz:

$$\overline{CE}^2 = \overline{DE} \cdot \overline{BE}$$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CE}^2}{\frac{\overline{AB}}{2}}$$

$$\overline{DE} = \frac{(6\text{ cm})^2}{\sqrt{13}\text{ cm}} = \frac{36}{\sqrt{13}}\text{ cm}$$

$$\underline{\overline{DE} \approx 10{,}0\text{ cm}}$$



38. geg.: $\overline{AD} = a = 4\text{ cm}$, $\overline{DF} = b = 1{,}5\text{ cm}$

ges.: Länge der Sehne $\overline{AB}$
Radius r

Lös.: Sehne $\overline{AB}$ - Pythagoras im $\Delta\,ADF$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{DF}^2$$

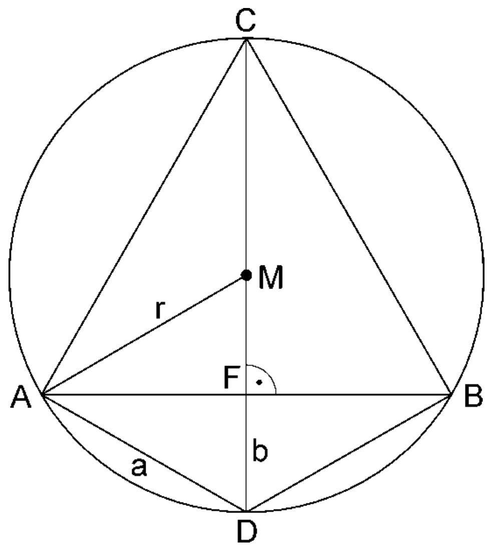
$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DF}^2$$

$$\overline{AF} = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (1{,}5\text{ cm})^2}$$

$$\overline{AF} = \sqrt{13{,}75}\text{ cm}$$

$$\Rightarrow\ \overline{AB} = 2\cdot\overline{AF} = 2\cdot\sqrt{13{,}75}\text{ cm}$$

$$\underline{\overline{AB} = \sqrt{55}\text{ cm}}$$



Radius r - Kathetensatz im $\Delta\,ADC$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DF}\cdot\overline{DC}$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{DF}\cdot 2r$$

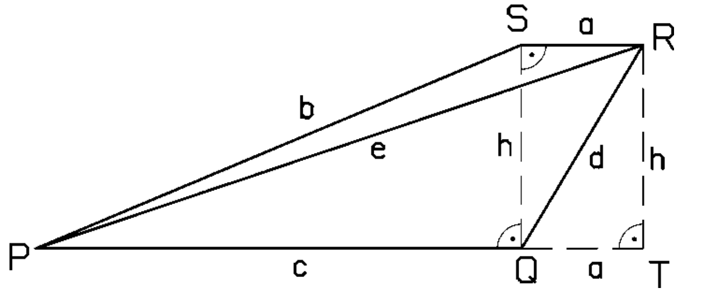
$$r = \frac{\overline{AD}^2}{2\cdot\overline{DF}} = \frac{(4\text{ cm})^2}{2\cdot(1{,}5\text{ cm})} = \underline{5\tfrac{1}{3}\text{ cm}}$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

39. Höhe h – Pythagoras im ΔPQS



$$h^2 + c^2 = b^2$$
$$h^2 = b^2 - c^2$$
$$h^2 = (13\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2$$
$$h = \sqrt{25}\text{ cm}$$
$$\underline{h = 5\text{ cm}}$$

Die Höhe h ist ebenfalls im ΔPQR die Höhe bezogen auf die Grundseite c.

Seite d – Pythagoras im ΔQRS:

$$d^2 = a^2 + h^2$$
$$d^2 = (3\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2$$
$$\underline{d = \sqrt{34}\text{ cm} \approx 5{,}83\text{ cm}}$$

Seite e – Pythagoras im ΔPTR:

$$e^2 = (c + a)^2 + h^2$$
$$e^2 = (15\text{ m})^2 + (5\text{ m})^2$$
$$\underline{e = \sqrt{250}\text{ cm} \approx 15{,}81\text{ cm}}$$

Fläche ΔPQR:

$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$
$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 12\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}$$
$$\underline{\underline{A_{PQR} = 30\text{ cm}^2}}$$

Umfang des Dreiecks PQR:

$$U = c + d + e$$
$$U = 12\text{ cm} + 5{,}83\text{ cm} + 15{,}81\text{ cm}$$
$$\underline{\underline{U = 33{,}64\text{ cm}}}$$

40. Einen Term h(d) für die Höhe h in Abhängigkeit von der Auslenkung d bestimmen:

Pythagoras:

$$l^2 = d^2 + (l - h)^2$$
$$l^2 = d^2 + l^2 - 2lh + h^2 \quad \left|\, -l^2\right.$$
$$0 = d^2 - 2lh + h^2$$
$$0 = h^2 - 2lh + d^2$$

$$h_{1/2} = \frac{2l \pm \sqrt{(2l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot d^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2l \pm \sqrt{4l^2 - 4d^2}}{2} = \frac{2l \pm 2\sqrt{(l^2 - d^2)}}{2}$$

$$\underline{h_{1/2} = l \pm \sqrt{l^2 - d^2}}$$

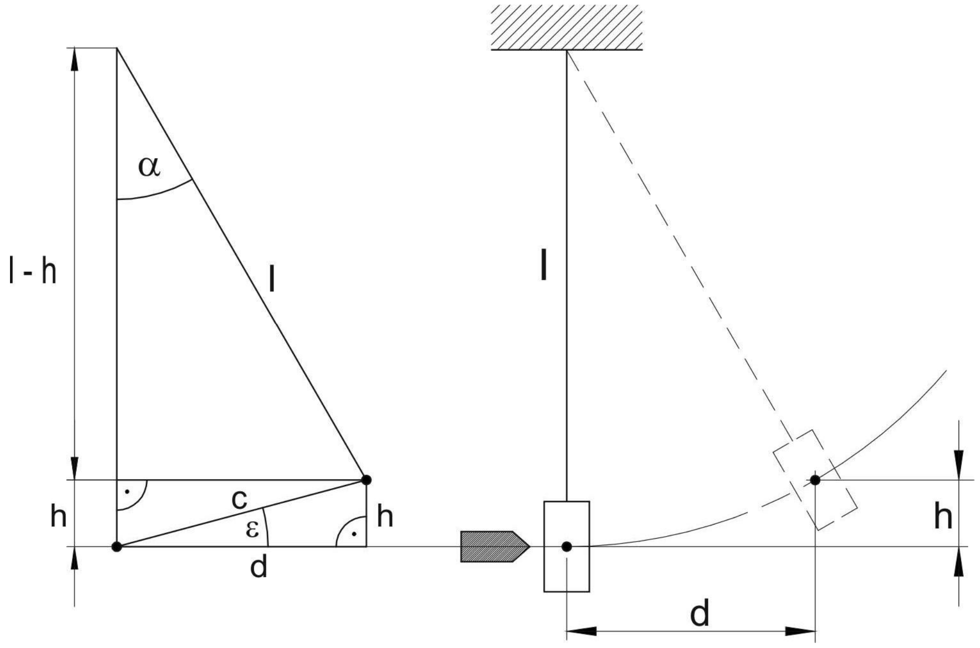
Es kann nur der negative Wurzelwert verwendet werden, weil sonst die Auslenkungshöhe h größer als die Fadenlänge l würde.

Bei gegebener Fadenlänge l erhält man nun: $\underline{\underline{h(d) = l - \sqrt{l^2 - d^2}}}$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –



41. Seitenlänge x des einbeschriebenen Quadrates

- Pythagoras:

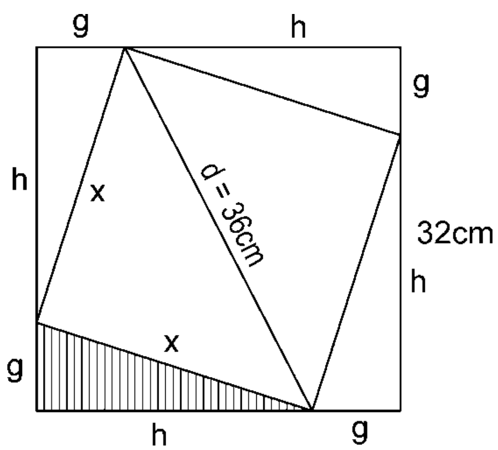
$$d^2 = x^2 + x^2$$

$$d^2 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\underline{x = \frac{d}{2}\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\text{ cm} \qquad (1)}$$



Seitenlängen im Dreieck:

$$g + h = 32\text{ cm}$$

$$\underline{g = 32\text{ cm} - h \qquad (2)} \qquad \underline{g^2 + h^2 = x^2 \qquad (3)}$$

$(1) + (2)$ in (3):

$$g^2 + h^2 = x^2$$

$$(32 - h)^2 + h^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$32^2 - 64h + h^2 + h^2 = \frac{36^2}{2}$$

$$2h^2 - 64h + 376 = 0 \qquad |:2$$

$$h^2 - 32h + 188 = 0$$

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

$$h_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 188}}{2} = \frac{32 \pm 4\sqrt{17}}{2}$$

$$h_{1/2} = 16 \pm 2\sqrt{17}$$

$\underline{h \approx 24{,}25\ \text{cm}}$ oder $(h \approx 7{,}75\ \text{cm})$

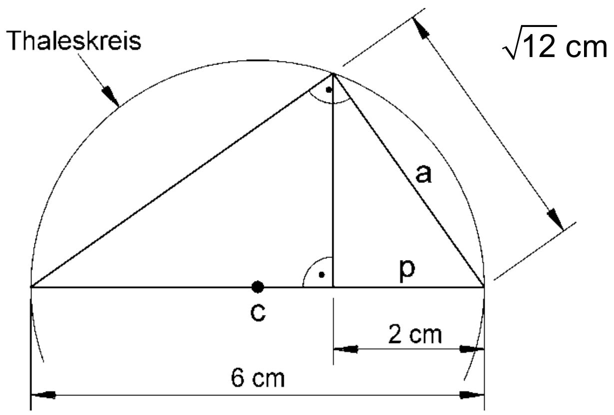
aus (2): $g = 32\ \text{cm} - h$

$\underline{g \approx 7{,}75\ \text{cm}}$

42. $\sqrt{12}$ mit Hilfe des Kathetensatzes konstruieren:

$a^2 = p \cdot c \Rightarrow \left(\sqrt{12}\right)^2 = 2 \cdot 6$

$12 = 6 \cdot 2$;
Man kann z.B. 6 cm antragen und anschließend den Thaleskreis zeichnen.
Auf einer Seite 2 cm abtragen und durch diese Markierung eine Senkrechte legen die den Thaleskreis schneidet. Von diesem Schnittpunkt bis zum Ende der 6 cm – Strecke eine Verbindungslinie zeichnen.
Diese Linie ist $\sqrt{12}$ cm lang.



GM_L0160

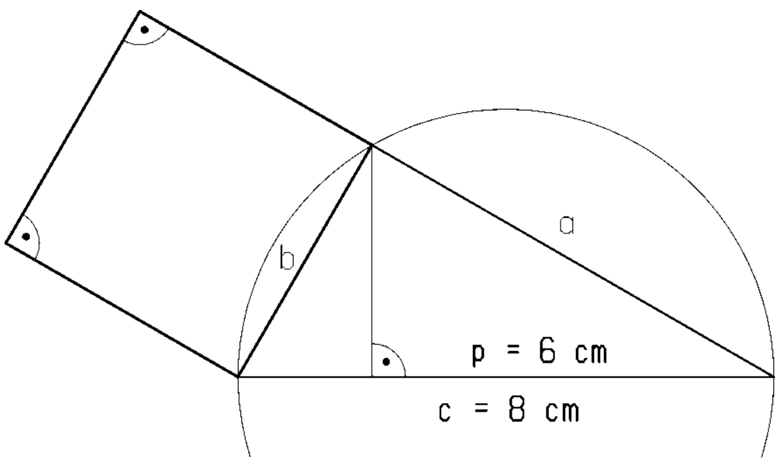
43. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit c = 8 cm, p = 6 cm (q = 2 cm)

Aus $b^2 = q \cdot c$

folgt $b = \sqrt{q \cdot c}$

$b = \sqrt{2 \cdot 8}$ cm

$\underline{\underline{b = 4\ \text{cm}}}$



Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

44. Das Quadrat mit der Seitenlänge s = 4 cm hat die Diagonalenlänge $d = 4\sqrt{2}\text{ cm}$.

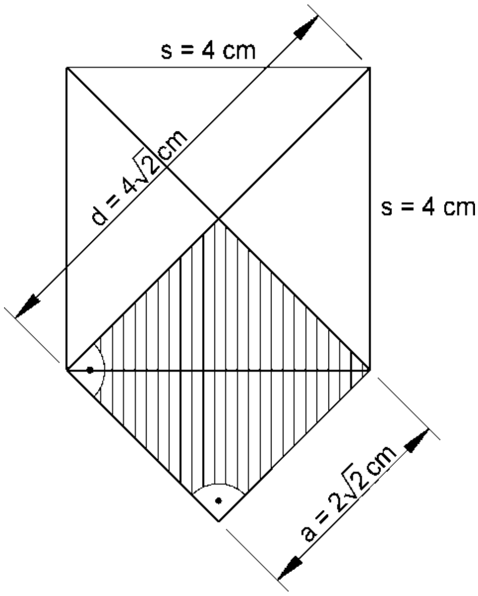
Die **halbe** Diagonalenlänge ist somit $\frac{d}{2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$.

Diese halbe Diagonale ist nun Seite des gesuchten Quadrates mit der Seitenlänge $a = \frac{d}{2} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$ und dem Flächeninhalt

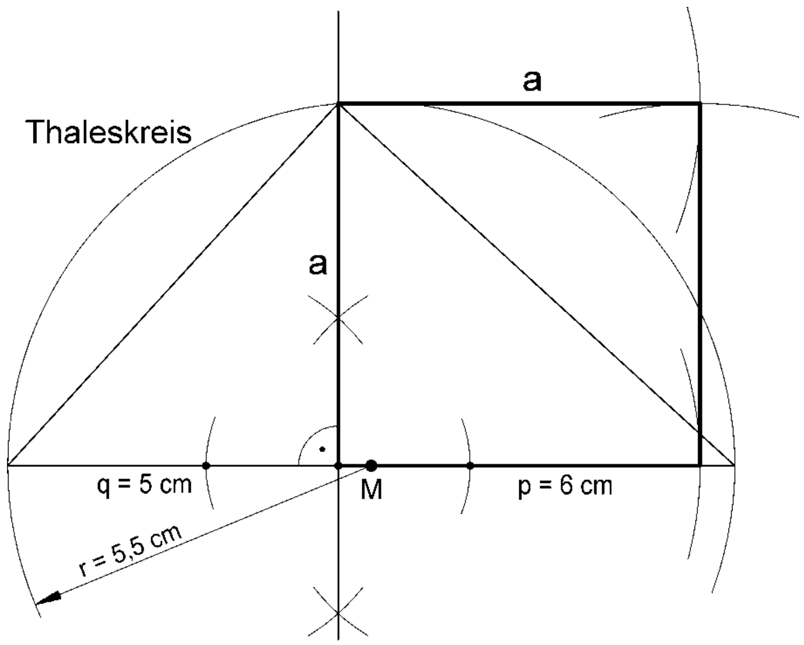
$$A_{\text{Quadrat}} = a^2$$

$$A_{\text{Quadrat}} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\text{ cm}\right)^2$$

$$\underline{A_{\text{Quadrat}} = 8\text{ cm}^2}$$



45. Ein Quadrat mit Flächeninhalt 30 cm² mit Zirkel und Lineal konstruieren.



Die Konstruktion basiert auf dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q$ im rechtwinkligen Dreieck:

- Strecke p = 6 cm und daran anschließend q = 5 cm antragen.
- Thaleskreis um die Gesamtstrecke $p + q = 11\text{ cm}$ mit Radius $r = 5{,}5\text{ cm}$.
- Senkrechte zwischen p und q schneidet den Thaleskreis in der Höhe h = a.
- Die Quadratseite a zum Quadrat ergänzen

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

46. 1. Möglichkeit mit Hilfe des Pythagoras:

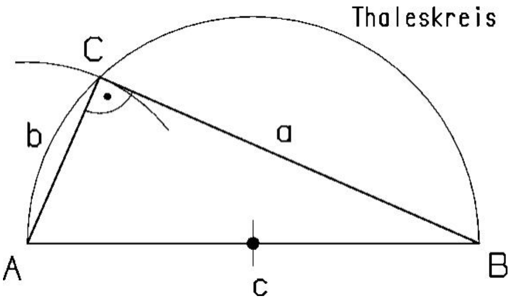
$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a = \sqrt{5^2 - 2^2}$

$\underline{a = \sqrt{21} \quad \Rightarrow \quad c = 5;\ b = 2}$

Im Dreieck ABC ist die Seite $a = \sqrt{21}$



2. Möglichkeit mit Hilfe des Höhensatzes:

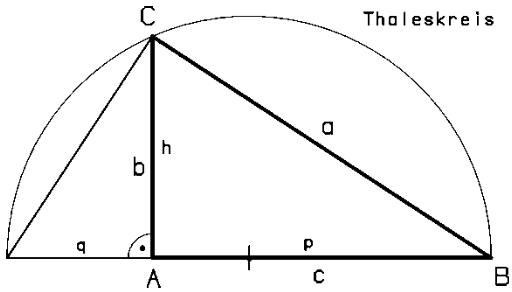
$h^2 = p \cdot q$

$h = \sqrt{p \cdot q}$

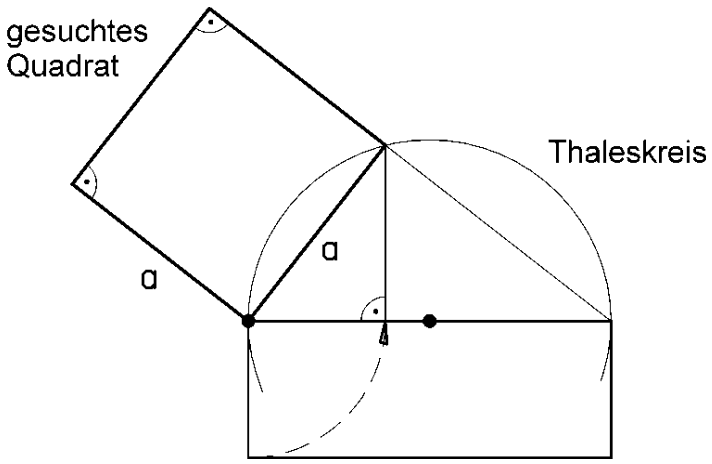
$h = \sqrt{7 \cdot 3}$

$\underline{h = \sqrt{21} \quad \Rightarrow \quad p = 7;\ q = 3}$

Im Dreieck ABC ist die Seite $h = b = \sqrt{21}$



47.



GM_L0722

48. Man könnte z.B. den Höhensatz verwenden.

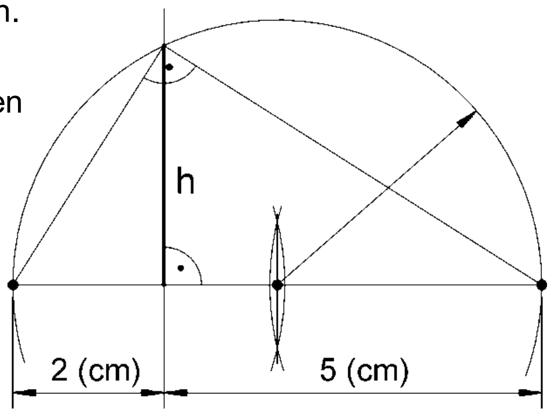
Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks zum Quadrat ist das Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten => Höhensatz:

$h^2 = p \cdot q$

in unserem Fall

$h^2 = 5 \cdot 2 \left(cm^2\right)$

$\underline{\underline{h = \sqrt{10}}}$



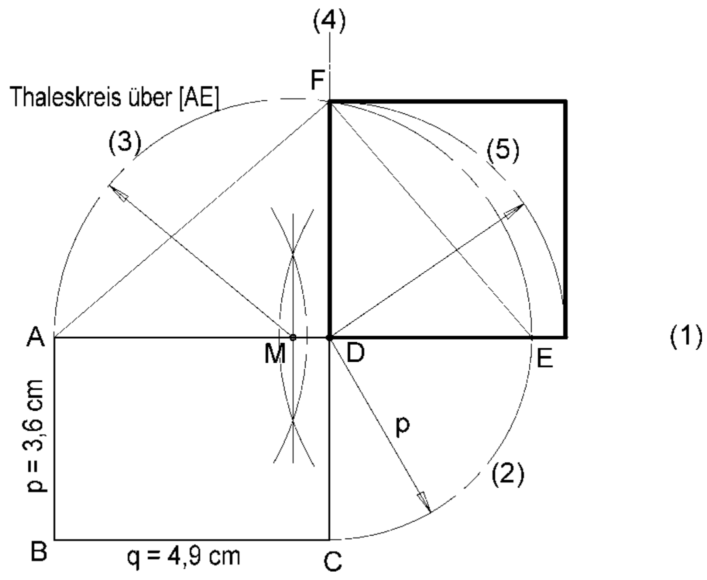
Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –

49. **Konstruktionsbeschreibung:**

- Rechteck ABCD mit $\overline{AD}$ = q = 4,9 cm und $\overline{AB}$ = p = 3,6 cm zeichnen.
- Strecke AD über D hinaus verlängern (1)
- Schnittpunkt von $[AD$ und Kreis K(D; r = p) ergibt E (2)
- Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AE}$ konstruieren.
- Thaleskreis mit Mittelpunkt M antragen. (3)
- CD über D hinaus verlängern => [CD schneidet Thaleskreis in F. (4)
- Strecke [DF] in den Zirkel nehmen und in D entlang der Halbgeraden [DE antragen. (5)
- Zu einem Quadrat ergänzen.



50. Die Konstruktion des Rechtecks kann mit Hilfe eines Satzes des Euklid ausgeführt werden.

Die längere Rechteckseite ist die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks und die kürzere Seite ist der Hypotenusenabschnitt p.

Das rechtwinklige Dreieck mit c = 7 cm und seiner 4cm langen Kathete wird nach folgendem Ablauf konstruiert (Zeichnung verkleinert):

Aufgaben zum Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz 2

Klasse 9

- Lösungen –