

# Das Hebelgesetz zur Lösung technischer Aufgaben

Es gibt einseitige Hebel, zweiseitige Hebel und Winkelhebel. Mit allen Hebeln kann man die Größe und Richtung von Kräften ändern. In der Regel verwendet man Hebel zur Vergrößerung von Kräften. Das Hebelgesetz findet in der Technik eine sehr weitverzweigte Anwendung, zum Beispiel bei Bremshebeln, Pressvorrichtungen, Spanneisen, Brechstangen, Schraubenschlüsseln, Scheren, Zangen, usw.

## Die Kraft F

Die Einheit für die Kraft ist das Newton, Einheitszeichen N. 1 N ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung  $1 \text{ m/s}^2$  erteilt, also  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$ , oder  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ .

Liegen große Kräfte vor, dann verwendet man das Kilonewton kN. Es ist  $1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$ . Auch Gewichte erzeugen Kräfte. Man bezeichnet diese Kräfte als Gewichtskräfte  $G$  und setzt sie ebenfalls in Newton ein. Wenn wir einen Körper mit der Masse  $m$  in kg am freien Fall mit der Erdbeschleunigung  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$  hindern wollen, dann ist die Gewichtskraft  $G = m \cdot g$  erforderlich.

Bei der Lösung technischer Aufgaben mit dem Hebelgesetz sind die Kräfte  $F$  oder die Gewichtskräfte  $G$  in Newton gegeben. Die Wirkung der Kraft am Hebel kann man nur dann genau feststellen, wenn neben dem Betrag der Kraft  $F$  auch ihre Lage, also der Hebelarm und ihr Richtungssinn bekannt sind. Den Richtungssinn der Kraft deutet man durch eine Pfeilspitze an.

## Das Kraftmoment oder Drehmoment M

Das Moment  $M$  entsteht aus dem Produkt Kraft  $F$  mal Hebelarm  $l$ , es ist also  $M = F \cdot l$ . Setzt man  $F$  in N und  $l$  in mm ein, dann erhält man das Moment  $M$  in Nmm. Im Bedarfsfalle kann man Momente auch in Nm oder kNm angeben.

Es gibt linksdrehende und rechtsdrehende Momente. Bezugspunkt bei den jeweiligen Aufgaben ist der Hebeldrehpunkt A.

Linksdrehende Momente sind positiv und erhalten das Vorzeichen +. Wenn vor einem Moment kein Vorzeichen steht, dann ist das Moment immer positiv.

Rechtsdrehende Momente sind negativ und erhalten das Vorzeichen -. Das Minusvorzeichen darf man nicht weglassen.

## Das Gleichgewicht am Hebel

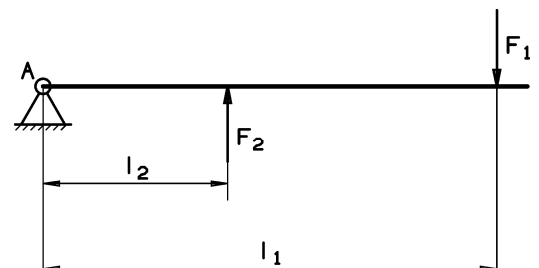
Der einseitige Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn für den Hebeldrehpunkt A die Summe aller Momente = 0 ist. Man schreibt  $\sum M_{(A)} = 0$ , also

Summe aller Momente um den Drehpunkt A = 0.

Die Kraft  $F_1$  dreht um A rechts herum, es wirkt also das Teilmoment  $-F_1 \cdot l_1$ .

Die Kraft  $F_2$  dreht um A links herum, es wirkt also das Teilmoment  $F_2 \cdot l_2$ . Für das

Gleichgewicht erhält man somit  $\sum M_{(A)} = 0 = -F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2$ . Nach der Formelumstellung wird  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ . In dieser Gleichung müssen immer drei Größen bekannt sein. Die vierte Größe kann dann berechnet werden.



# Das Hebelgesetz zur Lösung technischer Aufgaben

Zur Übung stellen wir die Gleichung  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$  nach allen Größen um.

1. Die Kraft  $F_1$  ist unbekannt, man erhält  $F_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{l_1}$ .
2. Die Kraft  $F_2$  ist unbekannt, man erhält  $F_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{l_2}$ .
3. Der Hebelarm  $l_1$  ist unbekannt, man erhält  $l_1 = \frac{F_2 \cdot l_2}{F_1}$ .
4. Der Hebelarm  $l_2$  ist unbekannt, man erhält  $l_2 = \frac{F_1 \cdot l_1}{F_2}$ .

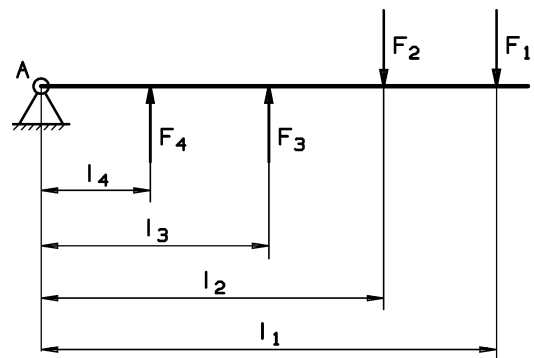
Greifen an einem einseitigen Hebel mehr als zwei Kräfte an, dann gilt für das Gleichgewicht ebenfalls  $\Sigma M_{(A)} = 0$ .

Für den einseitigen Hebel wird

$$\begin{aligned} \Sigma M_{(A)} &= 0 \\ &= -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 + F_4 \cdot l_4 \end{aligned}$$

Nach der Formelumstellung erhält man

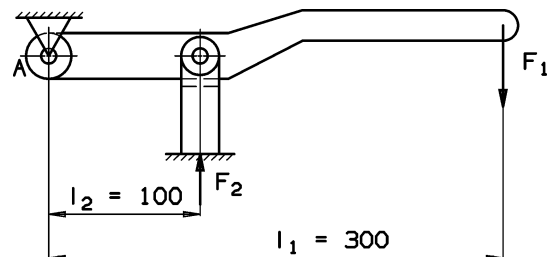
$$F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 = F_3 \cdot l_3 + F_4 \cdot l_4$$



Die letzte Gleichung sagt auch aus, dass die Summe aller rechtsdrehenden Momente  $F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2$  gleich der Summe aller linksdrehenden Momente  $F_3 \cdot l_3 + F_4 \cdot l_4$  sein muss.

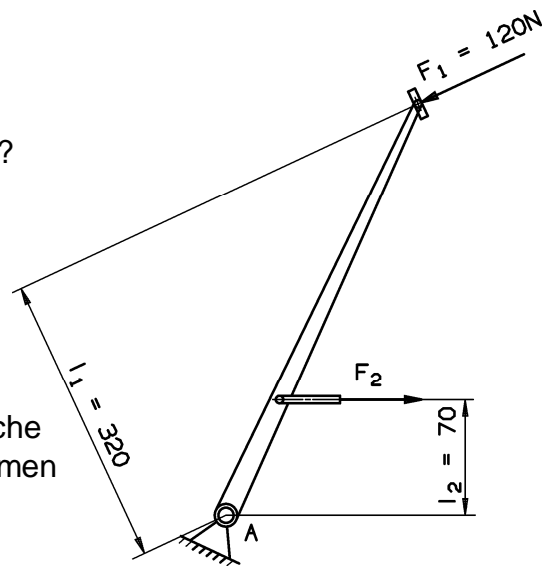
## Übungsaufgaben zum einseitigen Hebel

1. a) An einem Presshebel greift die Handkraft  $F_1 = 200 \text{ N}$  am Hebelarm  $l_1 = 300 \text{ mm}$  an. Welche Presskraft  $F_2$  wirkt im Abstand  $l_2 = 100 \text{ mm}$ , wenn sich der Hebel um den Drehpunkt A im Gleichgewicht befindet?  
 b) Berechne für den Presshebel die Kraft  $F_1$ , wenn der Hebel mit  $l_1 = 400 \text{ mm}$  und  $l_2 = 100 \text{ mm}$  ausgeführt wird und die Kraft  $F_2 = 900 \text{ N}$  betragen soll.



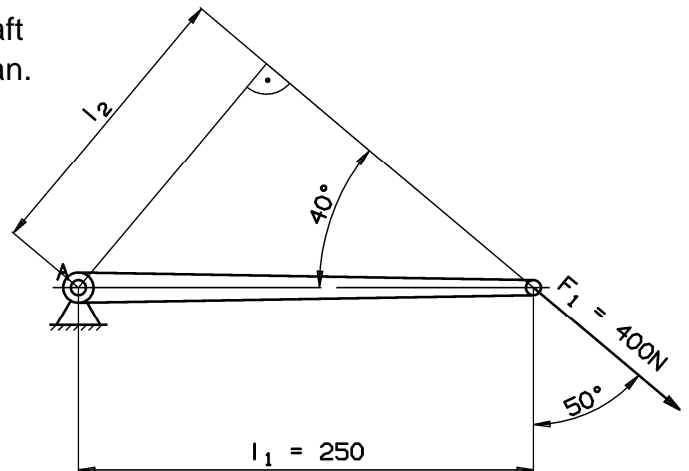
# Das Hebelgesetz zur Lösung technischer Aufgaben

2. a) An dem Bremshebel greift die Fußkraft  $F_1 = 120\text{ N}$  an.  
 Wie groß ist die Kraft  $F_2$  im Bremsgestänge?  
 Der senkrechte Wirkabstand der Fußkraft  $F_1$  bis zum Drehpunkt A beträgt  $l_1 = 320\text{ mm}$ .  
 Der senkrechte Wirkabstand der Kraft  $F_2$  beträgt  $l_2 = 70\text{ mm}$ .

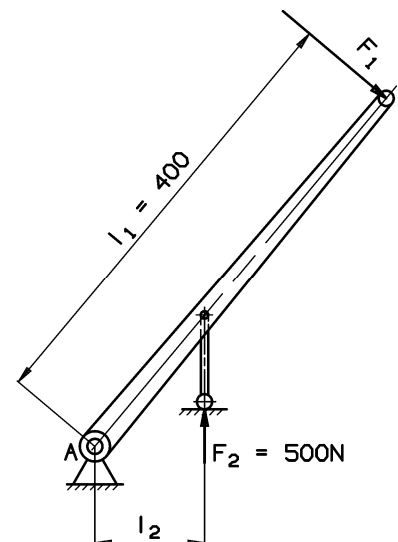


- b) Berechne für den Bremshebel die erforderliche Fußkraft  $F_1$ , wenn bei den gleichen Hebelarmen die Kraft  $F_2 = 600\text{ N}$  betragen soll.

3. An dem einseitigen Hebel greift die Kraft  $F_1 = 400\text{ N}$  unter dem Winkel  $\alpha = 40^\circ$  an.  
 Wie groß ist das wirksame Kraftmoment  $M$ ?



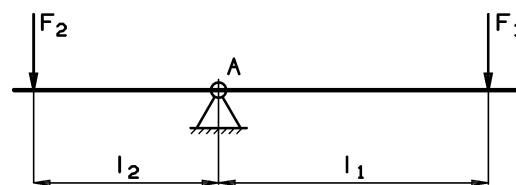
4. An dem einseitigen Hebel greift die Kraft  $F_1$  am Hebelarm  $l_1 = 400\text{ mm}$  an. Die Stützkraft an der Auflage beträgt  $F_2 = 500\text{ N}$ .  
 Wie groß muss man den Hebelarm  $l_2$  machen, damit das Verhältnis der Kräfte  $F_1 : F_2 = 1 : 2,5$  wird?  
 Wie groß muss  $F_1$  sein?



# Das Hebelgesetz zur Lösung technischer Aufgaben

## Der zweiseitige Hebel

Der zweiseitige Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn für den Drehpunkt A die Summe aller Momente = 0 ist.  $\Sigma M_{(A)} = 0 = -F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2$ ,  
daraus wird  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ .



In dieser Gleichung müssen wieder drei Größen bekannt sein. Die vierte Größe kann man berechnen.

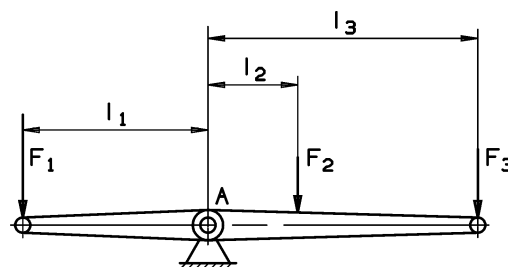
Wenn an einem zweiseitigen Hebel mehr als zwei Kräfte angreifen, gilt ebenfalls  $\Sigma M_{(A)} = 0$ .

Für den zweiseitigen Hebel wird also

$$\Sigma M_{(A)} = 0 = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 - F_3 \cdot l_3,$$

daraus erhält man  $F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 = F_1 \cdot l_1$ .

In dieser Gleichung müssen fünf Größen bekannt sein. Die sechste Größe kann man berechnen.

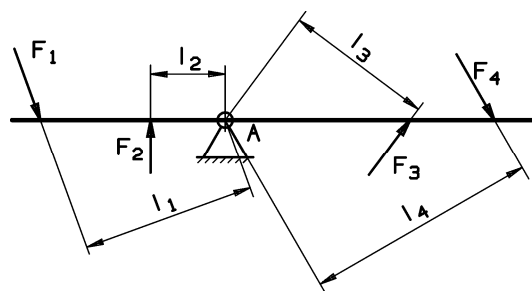


Bei schräg angreifenden Kräften gilt als Hebelarm immer der senkrechte Abstand von der Wirklinie der Kraft bis in den Hebel Drehpunkt A.

Für den zweiseitigen Hebel wird also

$$\Sigma M_{(A)} = 0 = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 - F_4 \cdot l_4,$$

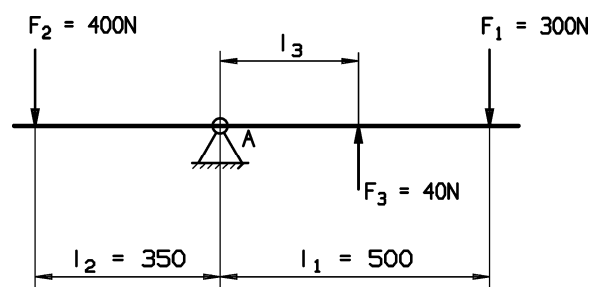
daraus erhält man  $F_2 \cdot l_2 + F_4 \cdot l_4 = F_1 \cdot l_1 + F_3 \cdot l_3$ .



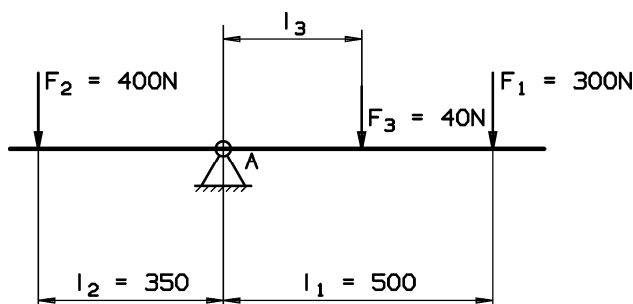
Diese Gleichung sagt wieder aus, dass die Summe aller rechtsdrehenden Momente gleich der Summe aller linksdrehenden Momente sein muss.

## Übungsaufgaben zum zweiseitigen Hebel

5. In welchem Abstand  $l_3$  erzeugt die Kraft  $F_3 = 40 \text{ N}$  an dem zweiseitigen Hebel Gleichgewicht, wenn die anderen Kräfte und Hebelarme gegeben sind?

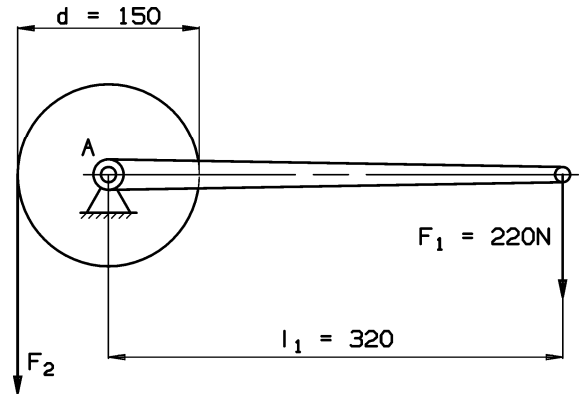


6. In welchem Abstand  $l_3$  erzeugt die Kraft  $F_3 = 40 \text{ N}$  an dem zweiseitigen Hebel Gleichgewicht, wenn die Kraft  $F_3$  nach unten gerichtet wirkt!



# Das Hebelgesetz zur Lösung technischer Aufgaben

7. An der Kurbel eines Wellrades greift im Abstand  $l_1 = 320 \text{ mm}$  die Handkraft  $F_1 = 220 \text{ N}$  an.  
Wie groß ist die im Seil hervorgerufene Kraft  $F_2$ , wenn der Wellraddurchmesser  $d = 150 \text{ mm}$  beträgt?



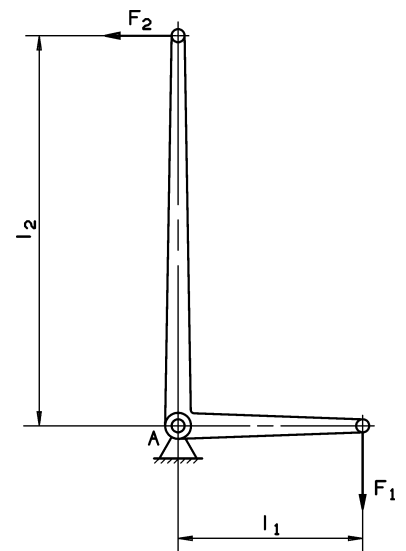
8. Der Konstrukteur hat den Wellraddurchmesser  $d$  auf  $200 \text{ mm}$  vergrößert, die im Seil wirksame Kraft soll  $F_2 = 700 \text{ N}$  betragen. Wie groß muss jetzt die Handkraft  $F_1$  in Aufgabe 7 werden, wenn aus konstruktiven Gründen  $l_1 : d = 2 : 1$  sein soll?

## Der Winkelhebel

Der Winkelhebel ist ein zweiseitiger Hebel. Er befindet sich im Gleichgewicht, wenn für den Hebeldrehpunkt A die Summe aller Momente  $= 0$  ist.

Es wird also wieder  $\sum M_{(A)} = 0 = -F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2$ .

Nach der Formelumstellung ergibt sich  $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ .



9. a) Durch die Kombination einseitiger Hebel und Winkelhebel kann man ein Hebelgestänge konstruieren, bei dem die eingeleitete Kraft  $F_1$  in die Kraft  $F_3$  umgesetzt wird (Bild unten).  
Wie groß ist die Kraft  $F_3$  bei den gegebenen Werten  $F_1 = 180 \text{ N}$ ,  $l_1 = 530 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 120 \text{ mm}$ ,  $l_3 = 180 \text{ mm}$ ,  $l_4 = 90 \text{ mm}$ ?

- b) Das Hebelgestänge soll  $F_3 = 2000 \text{ N}$  liefern. Wie groß muss der neue Hebelarm  $l_1$  sein, wenn die eingeleitete Kraft nunmehr  $F_1 = 200 \text{ N}$  beträgt?

