

2. Stegreifaufgabe Mathematik

Klasse 11

- Lösungen -

1.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2\sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 0, \text{ da } \sqrt{x} = 0 \text{ und } \frac{\sin x}{x} = 1$$

oder Berechnung mit der L'Hospital-Regel:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4\sqrt{x} \cdot \cos x \right) = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = a$$

$$\Rightarrow \text{Substitution durch } y = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow a = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{y^3} \cdot \sin y \right) = 0, \text{ da } \frac{1}{y^3} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2 \cos 2x} = \frac{3}{2} \quad (\text{L'Hospital-Regel})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot x^7} = \begin{cases} +\infty & \text{für } x > 0 \\ -\infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- Lösungen -

2.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(\sin(x+1)) + \sin(x+1)}{2 \cdot (x+1)^2}$$

$$\Rightarrow x = -1 - h$$

$$\text{LG: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h) \cdot \sin(-1-h+1) + \sin(-1-h+1)}{2 \cdot (-1-h+1)^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h) \cdot \sin(-h) + \sin(-h)}{2 \cdot h^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(-h) \cdot [(-1-h) + 1]}{2 \cdot h^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(-h)}{-2 \cdot h} = \text{(L'Hospital-Regel)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 \cdot \cos(-h)}{-2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos(-h)}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -1 + h$$

$$\text{RG: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h) \cdot \sin(-1+h+1) + \sin(-1+h+1)}{2 \cdot (-1+h+1)^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h) \cdot \sin(h) + \sin(h)}{2 \cdot h^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \cdot (-1+h+1)}{2 \cdot h^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{2 \cdot h} = \text{(L'Hospital-Regel)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)}{2} = \frac{1}{2}$$
