Gymnasium

2. Stegreifaufgabe Mathematik

Klasse 11

- Lösungen -

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-2} & \text{für } 2<x\le 4\\ 0{,}5x+1 & \text{für } x>4\end{cases}$

ist f(x) für alle $x \in \left]2;\ \infty\right[$ stetig?

Bedingung für die Stetigkeit an der Stelle $\bar{x}=4$:

$\lim\limits_{h\to 0} f(\bar{x}-h) \quad = \lim\limits_{h\to 0} f(\bar{x}+h) \quad = f(\bar{x})$

"linksseitiger Grenzwert" = "rechtsseitiger Grenzwert" = "Funktionswert" an der Stelle $\bar{x}$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{4-h-2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{2-h}\right) = 2$$

$$\lim_{h\to 0}\left[0{,}5\cdot(4+h)+1\right] = \lim_{h\to 0}\left(2+1+0{,}5\cdot h\right) = 3$$

$\Rightarrow$ f(x) ist an der Stelle x_0 = 4 nicht stetig.

2. $g(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{für } x<-1\\ x^2+kx & \text{für } x\ge -1\end{cases}$

Ges: k, so dass g(x) an der Stelle x_0= -1 stetig ist.

Lösung:

linksseitiger Grenzwert:

LG: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0-h)=\lim\limits_{h\to 0}(+1+h+2)=3$

rechtsseitiger Grenzwert:

RG: $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left((-1+h)^2+k\cdot(-1+h)\right)=\lim\limits_{h\to 0}(1-2h+h^2-k+kh)=1-k$

$\Rightarrow f(x_0)=f(-1)=1-k$

Bedingung für Stetigkeit: $RG=LG=f(x_0)$

$$3=1-k$$

$$\underline{\underline{k=-2}}$$

3. $$f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}=\frac{2x^2-4x-16}{x^2-x-6}$$

Zähler:

$$z(x)=2\cdot(x^2-2x-8)$$

$$x_{1/2}=\frac{+2\pm\sqrt{4+4\cdot 8}}{2}$$

$$x_1=\frac{2+6}{2}=4$$

$$x_2=\frac{2-6}{2}=-2$$

$$\Rightarrow z(x)=2\cdot(x+2)\cdot(x-4)$$

Nenner:

$$n(x)=x^2-x-6$$

$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+6\cdot 4}}{2}$$

$$x_3=\frac{1+5}{2}=3$$

$$x_4=\frac{1-5}{2}=-2$$

$$\Rightarrow n(x)=(x+2)\cdot(x-3)$$

$$f(x)=\frac{2\,(x+2)\cdot(x-4)}{(x+2)\cdot(x-3)};\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 3\}$$

die stetige Fortsetzungsfunktion $\overline{f(x)}$ von f(x) ist:

$$\overline{f(x)}=\frac{2\,(x-4)}{x-3}$$

$$\overline{f(x)}=\frac{2x-8}{x-3}\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

