1. Stegreifaufgabe Mathematik

Klasse 11 / G8

- Lösungen -

1. Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{2x^2+6x}{x^2-2x}$.

Bestimmung der **Definitionsmenge**:

Der Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion darf NIE „null“ werden!!!

$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$\underline{x_1=0} \quad \vee \quad x-2=0$$
$$\underline{x_2=2}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{D_{max}=\mathbb{R}/\{0;\ 2\}}}$$

Bestimmung der **Nullstellen**:

$$f(x)=\frac{2x^2+6x}{x^2-2x}$$

nur der Zähler darf null werden !!!

$$0=2x^2+6x$$
$$0=2x(x+3)$$
$$0=2x \quad \vee \quad x+3=0$$
$$\underline{x_1=0} \qquad \underline{x_2=-3}$$
$$\text{ABER}: x_1 \notin D_{max}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{N(-3/0)}}$$

Verhalten an den Definitionslücken:

x = 0 (aus der Def.menge)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+6)}{(x-2)}=\frac{6}{-2}=-3$$

Ist x_0 eine Nullstelle des Zählers und eine Nullstelle des Nenners einer gebrochen rationalen Funktion und existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$, so ist x_0 eine stetig hebbare Definitionslücke der Funktion f.

➔ Der Graph hat bei dem Punkt $P(0|-3)$ ein „Loch“!!!

x = 2 (aus der Def.menge)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+6x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\underbrace{\frac{2x^2+6x}{x}}_{\to 10}\cdot\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to -\infty}=-\infty$$

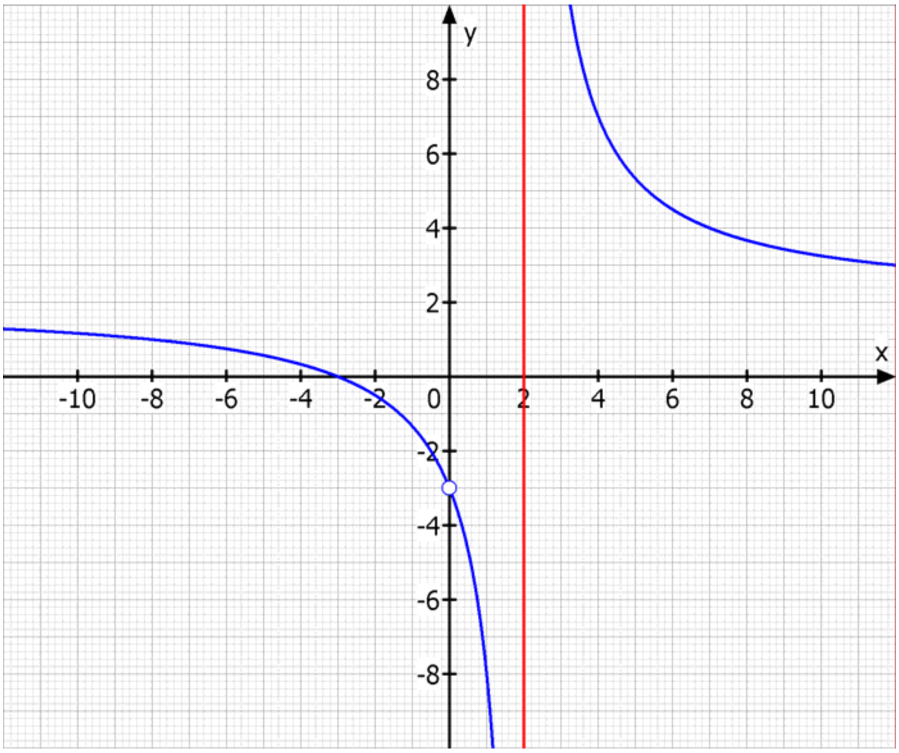
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+6x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\underbrace{\frac{2x^2+6x}{x}}_{\to 10}\cdot\underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to \infty}=\infty$$

Merke:

Wenn man sich das Verhalten an den Definitionslücken mit dem Limes anschaut, soll man die Definitionslücke abspalten !

- Lösungen -

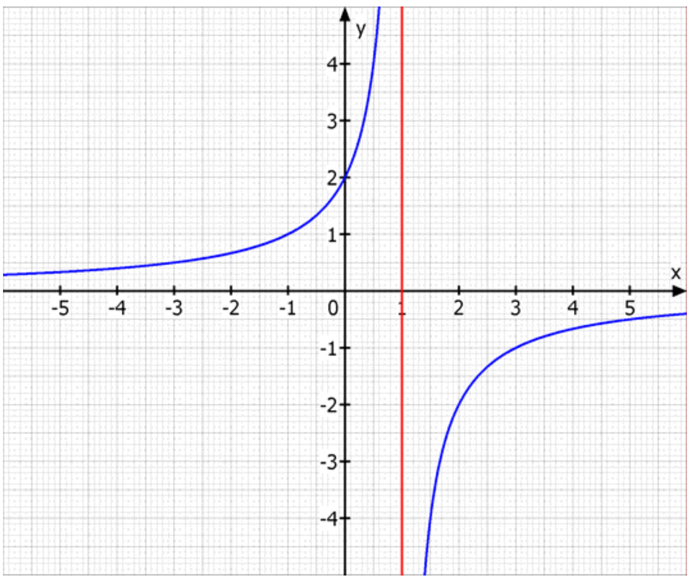
Skizze:



1. Einzeichnen der Polstelle x = 2 mit Vorzeichenwechsel
2. bei $P(0\,|-3)$ eine stetig hebbare Definitionslücke => „Loch“
3. Eintragen der Nullstelle $N(-3\,|\,0)$
4. links der Polstelle: Annäherung an -∞ (siehe $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$)
5. rechts der Polstelle: Annäherung an ∞ (siehe $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$)

2. Den Funktionsterm des Graphen herausfinden

1. Annäherung an x = 1
   => ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel
   => einfache Polstelle
   und x = 1 ist eine Definitionslücke
2. Annäherung an y = 0
   => $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
3. keine Nullstellen
4. f(0) = 2



Funktionsterm: $\underline{\underline{f(x) = \dfrac{-2}{(x-1)}}}$

- Lösungen -

3. Einen Funktionsterm angeben, der

1. eine Polstelle bei $x = -4$ ohne Vorzeichenwechsel besitzt,

   => Polstelle mit geradem Exponenten
   Beispiel: $f(x) = \dfrac{?}{(x+4)^2\,?}$

2. eine dreifache Nullstelle bei $x = 5$ besitzt

   x = 5 => $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(x+4)^2}$

3. eine Definitionslücke bei $x = 7$ hat, die keine Polstelle ist !

   => x = 7 muss Nenner- und Zähler-Nullstelle sein!!!

$$f(x) = \frac{(x-5)^3\,(x-7)}{(x+4)^2(x-7)}$$