

# Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

1. Berechne die Scheitelkoordinaten und skizziere jeweils die Parabel mit der Gleichung
  - a)  $f(x) = x^2 - 6x + 5$
  - b)  $f(x) = -x^2 + 3x$
  - c)  $f(x) = 0,5x^2 + x + 2$
  - d)  $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 7$
  
2. Zeige: Die Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  hat die Scheitelkoordinaten
 
$$x_s = -\frac{b}{2a}; \quad y_s = c - \frac{b^2}{4a} \quad (a \neq 0)$$
  
3. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt P des Graphen von
  - a)  $f: y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2; x \in \mathbb{R}, P(0/?)$
  - b)  $f: y = -\frac{1}{2}x^{-1}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, P(-1/?)$
  - c)  $f: y = \sqrt{2x}; x \in \mathbb{R}^+, P(2/?)$
  
4.
  - a) Wie lautet die Gleichung der Normalen im Punkt P(2/? ) des Graphen der Funktion  $f: y = 0,1x^3$  ?
  - b) Gegeben ist die Funktion  $f: y = x^2; x \in \mathbb{R}$ . Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, das die Normale im Punkt P(1/? ) des Graphen mit beiden Koordinatenachsen einschließt ? 1 LE = 1 cm
  
5. Zeichne den Graphen der Funktion  $f: y = \frac{1}{2}x + \cos x$  in  $[0; 2\pi]$  !  
 In welchen Kurvenpunkten ergeben sich waagerechte Tangenten ?  
 In welchen Punkten ist der Graph relativ zur Umgebung am steilsten ? Die Antworten sind mit Hilfe der Ableitungsfunktion  $f'$ , deren Graph ebenfalls gezeichnet werden soll, zu begründen.
  
6. In welchen Punkten des Graphen von  $f: y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}; D_f = \mathbb{R}$  schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von  $45^\circ$  ein ?  
 Wie kann man ohne Zeichnung erkennen, dass es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?
  
7. Man bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f: y = x^3 - 2x + 1$  durch den Kurvenpunkt P(1/?). Hat die Tangente mit  $G_f$  noch einen Schnittpunkt gemeinsam ? Entscheide die Frage durch probierendes Einsetzen !  
 Zeichne sodann Graph und Tangente in einem geeigneten Intervall, das den Ursprung enthält !

# Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

8. a) Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen  $y = 2x - 3$  und  $y = x^2 + 2x - 7$  ?  
Wie lauten die Tangentengleichungen in den Schnittpunkten ?
- b) Welchen Punkt haben die Graphen von  $f: y = \cos x + \sin x$  und  $g: y = \sin x - 2\cos x$  in  $[0; \pi]$  gemeinsam ?  
Man berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt !
9. Durch die Gleichung  $y = ax^2 - 3x + \frac{1}{a}$ ;  $x \in \mathbb{R}$  mit dem Parameter  $a \neq 0$  ist eine Parabelschar gegeben. Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes für die Scheitel aller Parabeln ?
10. Zur Schar der Funktionen  $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k$  mit  $k \in \mathbb{R}$  als Scharparameter gehört eine Schar von Graphen  $G_{f_k}$ . Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte  $B_k$ , in denen die Graphen die Steigung 2 haben ?  
Zeige, dass diese Kurve zur Graphenschar  $G_{f_k}$  gehört !
11. Betrachtet wird die Schar der Funktionen  $f_k(x) = x + \frac{k}{x}$  mit  $k > 0$  als Scharparameter und  $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- a) Ermittle den Ableitungsterm  $f_k'(x)$  durch Grenzwertrechnung !
- b) Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte der Graphenschar mit waagerechter Tangente ?
12. Welcher Bedingung müssen die Koeffizienten des Terms  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  genügen, damit der Graph der Funktion  $f(x)$ ,  $D_f = \mathbb{R}$  keine waagerechten Tangenten hat ?
13. Zeige, dass sich die Graphen der Funktionen  $f: y = x^2 + 2x + 1$ ;  $x \in \mathbb{R}$  und  $g: y = ax^2 - 0,5x + 1$ ;  $x \in \mathbb{R}$  im Punkt  $S(0; ?)$  für jeden Wert  $a$  orthogonal (rechtwinklig) schneiden.  
Deute insbesondere den Fall  $a = 0$  !
14. Gegeben ist die Schar von Funktionen  $f_a: y = ax^2 - 2x + 1$ , wobei der Scharparameter  $a$  eine beliebige reelle Zahl vertritt.
- a) Für welche Belegung von  $a$  geht die Tangente in  $P(1; ?) \in G_{f_a}$  durch den Ursprung des Koordinatensystems ?
- b) Wie lautet die Gleichung der Normalen durch  $P$  für beliebige Werte von  $a$  ?

# Funktionen, vermischte Aufgaben

Klasse 11

- 15.** Gegeben ist die Schar von Funktionen  $f_k : f_k(x) = x^2 - kx$  mit  $x \in \mathbb{R}$  und den zugehörigen Graphen  $G_k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .
- Zeichne  $G_0$  und  $G_2$  mit 1 LE = 2 cm !
  - Zeige rechnerisch, dass sich alle Graphen  $G_k$  in genau einem Punkt schneiden !
  - Berechne allgemein die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen  $G_k$  mit dem Graphen  $G_p$  der Funktion  $p : y = \frac{1}{2} - x^2$ ;  $x \in \mathbb{R}$  und trage  $G_p$  in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein !
  - Zeige, dass alle Graphen  $G_k$  den Graphen  $G_p$  rechtwinklig schneiden !
- 16.** Zu untersuchen ist die Schar von Funktionen  $f_k : f_k(x) = x^2 - k|x|$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und den zugehörigen Graphen  $G_k$ .
- Bestimme die Nullstellen von  $f_k$  (Fallunterscheidung !) und zeichne die zu  $k = 1$  und  $k = -1$  gehörigen Graphen  $G_1$  und  $G_{-1}$  ! 1 LE = 2 cm
  - Wie muss  $k$  gewählt werden, damit der Graph  $G_k$  an der Stelle  $x_0 = 0$  einen Knick um  $90^\circ$  erfährt ?
  - Bestimme rechnerisch in Abhängigkeit von  $k$  die Anzahl der Punkte, die der Graph  $G_k$  mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten gemeinsam hat !