

Kreis und Kreisteile

Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -**Am Ende der Aufgabensammlung finden Sie eine Formelübersicht**

1.
 - a) Gib das Bogenmaß 2,312 im Gradmaß an.
 - b) Gib das Bogenmaß $\frac{11\pi}{9}$ im Gradmaß an.
 - c) Gib das Gradmaß 144° im Bogenmaß als Bruchteil von π an.
 - d) Gib das Gradmaß 2600° im Bogenmaß auf 2 Dezimalstellen an.

2. Der Umfang eines Kreises in Meter und der Flächeninhalt des Kreises in Quadratmeter stimmen im Zahlenwert überein. Berechne den Radius des Kreises.

3. Eine Kreisscheibe wird entlang ihres Umfangs mit einer dünnen Schnur der Länge 80 cm umfasst. Eine zweite, kleinere Scheibe wird durch eine zweite Schnur, die 10 cm kürzer ist, umfasst.
Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt der kleineren Scheibe geringer als der Inhalt der größeren Scheibe ?

4. Die Differenz der Umfänge zweier Kreise beträgt 6π , die Differenz der Flächen beträgt 18π . Berechne die Radien beider Kreise.

5. Berechne den Radius eines Kreises, dessen Umfang gleich der Differenz der Umfänge zweier Kreise mit den Flächeninhalten $A_1 = 49\pi$ und $A_2 = 16\pi$ ist.

6. Der griechische Geschichtsschreiber Thukydides hat die Behauptung aufgestellt, dass sich die Flächen kreisförmiger Inseln genauso verhalten wie die Zeiten, die man zu ihrer Umschiffung benötigt.
Könnte diese Behauptung stimmen ?

7. Von einem Kreisausschnitt (= Kreissektor) kennt man die Bogenlänge $b = 6$ cm und den Radius $r = 8$ cm.
Berechne den Sektorwinkel φ und den Flächeninhalt des Kreissektors.

8. Von einem Kreisausschnitt (= Kreissektor) kennt man den Radius $r = 8,5$ cm und den Flächeninhalt $A = 155$ cm².
Berechne den Sektorwinkel φ und die Bogenlänge des Kreisausschnitts.

Kreis und Kreisteile

Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

9. Ein Kreissektor mit dem Radius r hat den Umfang $U = 3r$.
Berechne den Sektorwinkel φ im Grad- und im Bogenmaß, und stelle eine Formel für die Fläche des Sektors in Abhängigkeit von r auf.
10. Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Umfang $U_1 = 8\pi$.
a) Bestimme Radius r_1 und Flächeninhalt A_1 des Kreises k_1 .
b) Der Kreissektor A_2 eines zweiten Kreises k_2 hat den Sektorwinkel $x = \frac{\pi}{4}$.
Wie groß muß der Radius von k_2 sein, damit der Flächeninhalt A_2 des Sektors doppelt so groß wird wie der Inhalt von k_1 ?
- Hinweis zu den Rechnungen:
In den einzelnen Rechenschritten ist Runden nicht erlaubt !
11. Berechne den Radius r eines Kreises, dessen Fläche der eines Sektors von 72° in einem Kreis mit dem Radius R gleich ist.
12. Eine Pizzeria verkauft Pizzen in drei Größen: 15 cm, 20 cm und 30 cm Durchmesser. Die kleinste kostet 6 EUR. Wie teuer wären die anderen Pizzen (derselben Sorte), wenn sich der Preis nur nach der Fläche richtete ?
13. Für welchen Sektorwinkel sind Kreisbogen und Radius eines beliebigen Kreissektors gleich lang ?
14. Wie viel Grad hat der Mittelpunktswinkel bei einem Kreisbogen, dessen Länge gleich dem Durchmesser des Kreises ist ?
(Skizze ! Auf 1 Stelle nach dem Komma runden)
15. Ein Kreissektor hat einen Sektorwinkel von 27° und eine Bogenlänge von 1,5 cm. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Kreises.
16. Berechne den Radius r und den Sektorwinkel φ (im Bogenmaß) eines Kreissektors, dessen Umfang $U = 10$ cm und dessen Flächeninhalt $A = 6$ cm² beträgt.
17. Der Umfang eines Kreises (Radius r) ist gleich dem Umfang eines Kreissektors mit gleichem Radius r . Berechne im Gradmaß den Sektorwinkel φ des Kreissektors.
Runde auf 2 Dezimalstellen nach dem Komma !

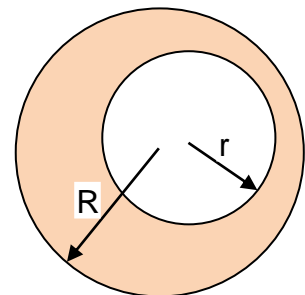
Kreis und Kreisteile

Klassen 9 / 10

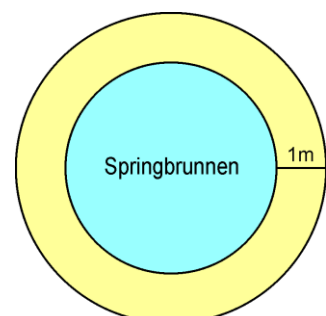
- Aufgaben Teil 1 -

18. Der Flächeninhalt eines Kreisausschnitts mit dem Radius $r = 6 \text{ cm}$ beträgt $2\pi \text{ cm}^2$. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel φ ?
19. Die Läufer A und B sollen einen Wettlauf auf einer kreisförmigen Bahn starten. Die Kreisbahn von Läufer A hat einen Durchmesser von 38m. Die Kreisbahn von Läufer B ist größer, sie hat zur Bahn von Läufer A einen konstanten Abstand von 1m. A läuft genau eine Runde. Damit beide bis zum Ziel gleich weit laufen, muß der Startpunkt von B um einen bestimmten Winkel α vorverlegt werden. Berechne diesen Winkel α (Skizze !)
20. Mit einem dünnen Faden kann man ein 15 cm breites und 30 cm langes Rechteck genau umspannen. Um wie viel Prozent ist die Fläche eines Kreises größer, den man mit dem Faden auch genau umspannen kann ?
21. Bei einer Filmspule mit Durchmesser 180 mm hat die innerste Windung vom Mittelpunkt M den Abstand 30 mm.
- Wie lang ist die äußerste Windung ?
 - In welchem Abstand von M ist die Länge einer Windung doppelt so lang wie die innerste Windung ?
22. Eine Ziege ist an einer Stange mit einem Seil festgebunden. Sie weidet alles ab, was sie erreichen kann. Am ersten Tag ist die Leine 3 m lang. Um wie viel Meter muss man sie von je einem Tag zum folgenden verlängern, damit die Ziege jeden Tag gleich viel Fläche abweiden kann ?

23. Berechne Umfang und Flächeninhalt des farbig markierten Bereichs in nebenstehendem Bild.



24. Um einen 2 m tiefen kreisrunden Springbrunnen mit einer Wasserfläche von ca. 20 m^2 soll ein Kiesweg von 1 m Breite angelegt werden. Welche Fläche hat der Kiesweg ?
Welche Angabe ist zur Lösung nicht notwendig ?

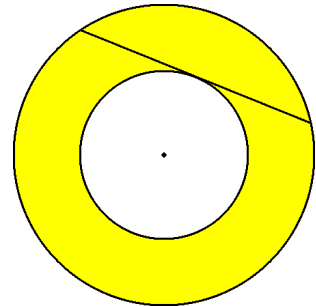


Kreis und Kreisteile

Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

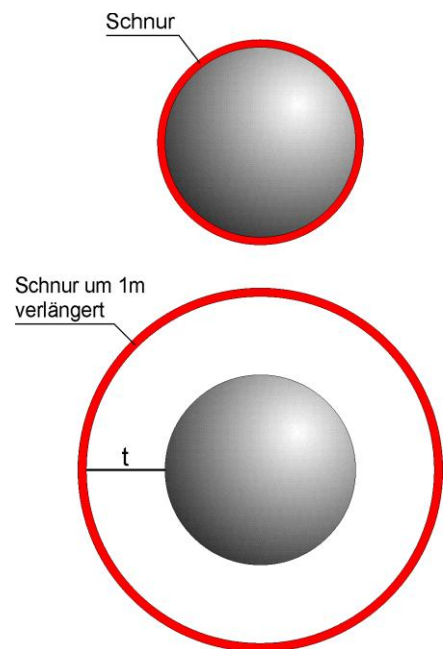
25. Die eingezeichnete Strecke hat die Länge 4 cm.
Berechne die Kreisringfläche.



26. Um den Umfang einer Kugel ($d = 8 \text{ cm}$) wird - gedanklich - eine Schnur gelegt. Man verlängert sie um 1 m und legt sie so um die Kugel, dass sie überall gleichen Abstand hat.

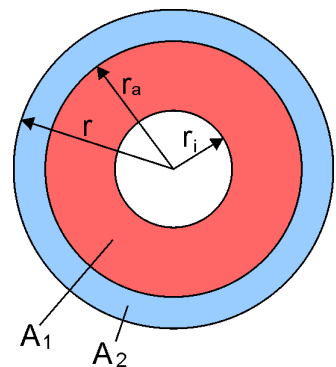
- Berechne den Abstand t zwischen Schnur und Kugel.
- Nun wird - wiederum gedanklich - entlang des Äquators eine Schnur um die Erde gelegt, die dann ebenfalls um 1 m verlängert wird und als konzentrischer Kreis um die Erdkugel an jeder Stelle gleichen Abstand zum Äquator hat. Der Äquator ist als idealer Kreis anzunehmen.

Könnte man die Kugel mit ihren 8 cm Durchmesser unter der Schnur hindurchrollen ?



27. Bei einem Kreisring mit dem Flächeninhalt $A_1 = 164\pi \text{ cm}^2$ unterscheiden sich die Radien des äußeren und des inneren Kreises um genau 2 cm.

- Berechne diese beiden Radien.
- Um den Kreisring wird ein Kreis gezogen. Welchen Radius r muss dieser Kreis aufweisen, wenn die Flächen A_1 und A_2 gleich groß sein sollen ?

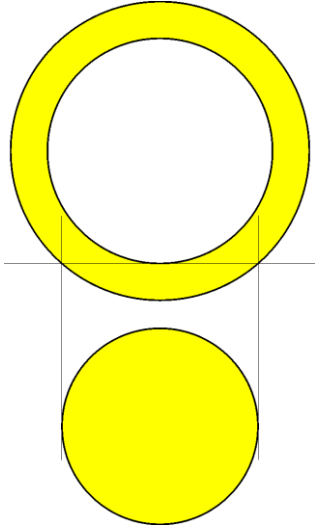


Kreis und Kreisteile

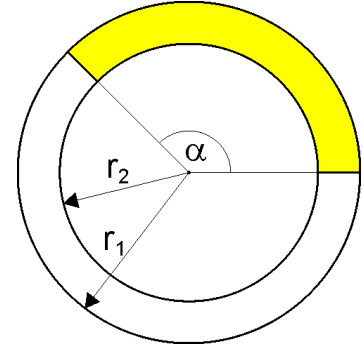
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

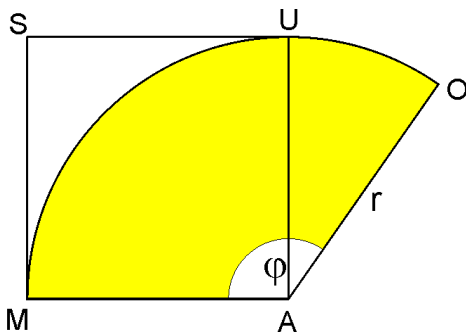
28. Zeige rechnerisch, dass die Kreisfläche (unten) und der Kreisring (oben) gleichen Flächeninhalt haben.



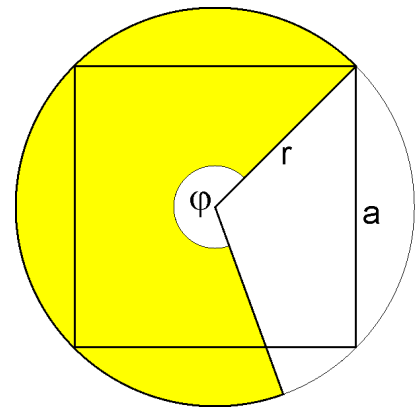
29. In der folgenden Figur sind die Größen $r_1 = 12 \text{ cm}$, $r_2 = 9 \text{ cm}$ $\alpha = 135^\circ$ gegeben. Berechne den Inhalt der farbigen Fläche.



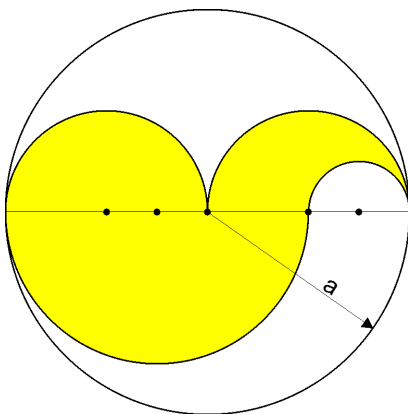
30. Der Sektor OMA hat denselben Inhalt wie das Quadrat MAUS. Berechne den Sektorwinkel φ .



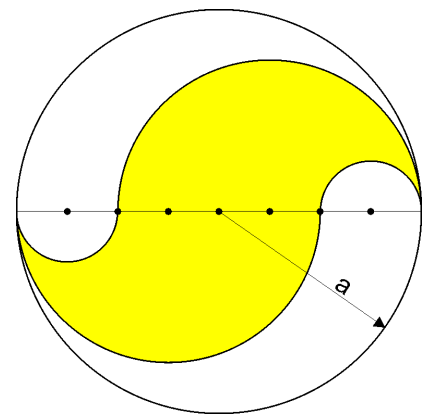
31. Die Flächeninhalte von Kreissektor und einbeschriebenem Quadrat sind gleich. Wie groß ist in diesem Fall der Sektorwinkel φ ?



32. Berechne Inhalt und Umfang der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



33. Berechne Inhalt und Umfang der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .

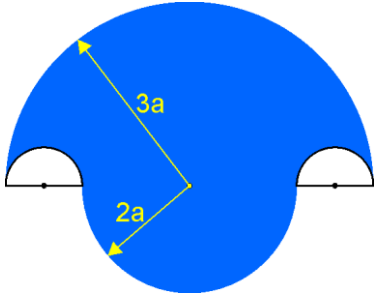


Kreis und Kreisteile

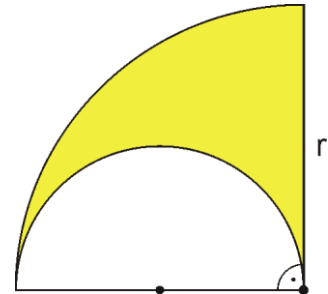
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

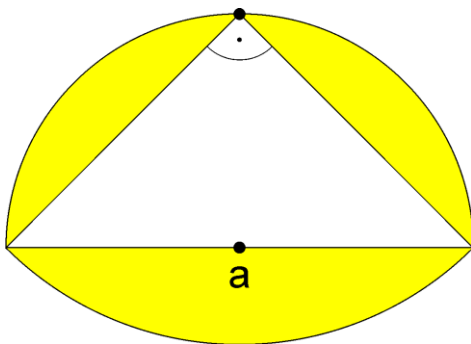
34. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



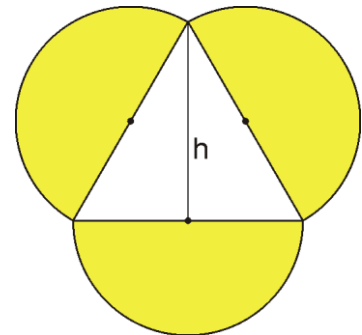
35. Berechne den Inhalt der farbigen Fläche in Abhängigkeit von r .



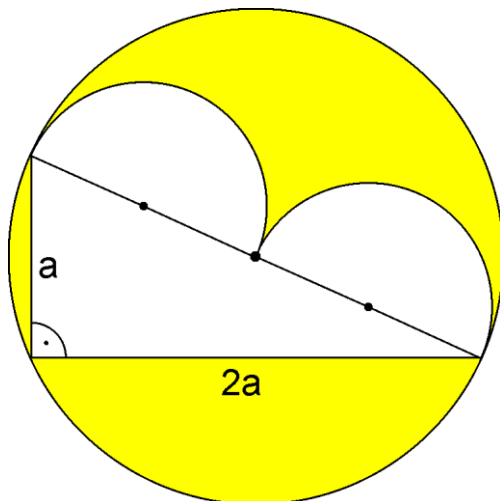
36. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



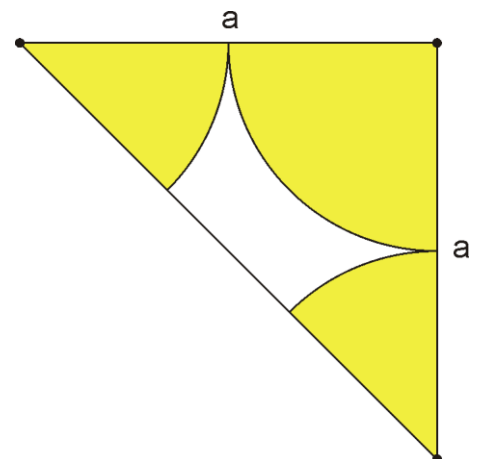
37. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von h (das Dreieck ist gleichseitig).



38. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



39. Bestimme den Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a . Die Radien der Kreise sind gleich groß. Das Dreieck ist rechtwinklig.

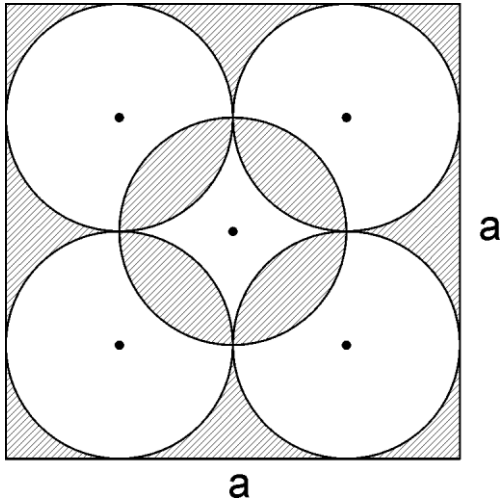


Kreis und Kreisteile

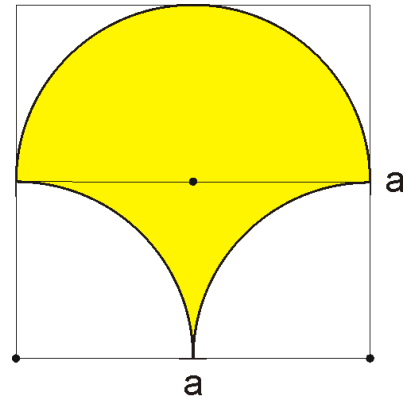
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

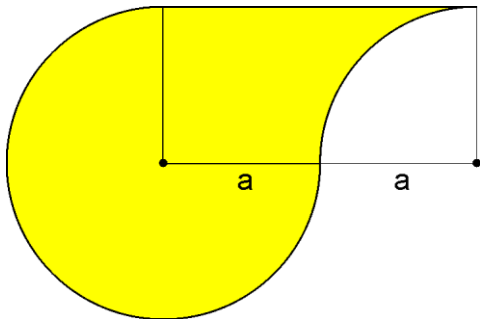
40. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der schraffierten Figur in Abhängigkeit von a .



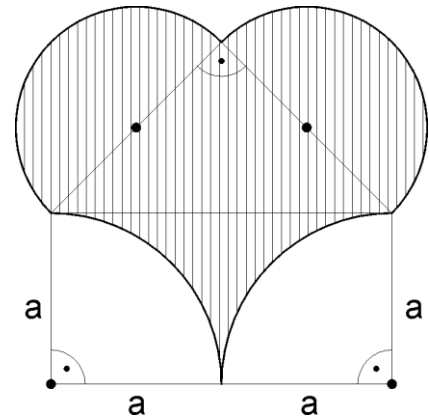
41. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



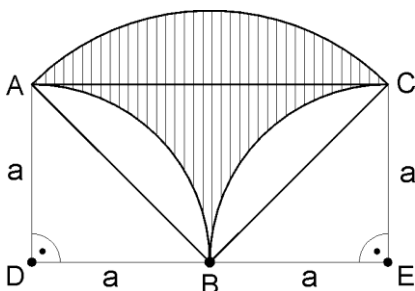
42. Bestimme Umfang und Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



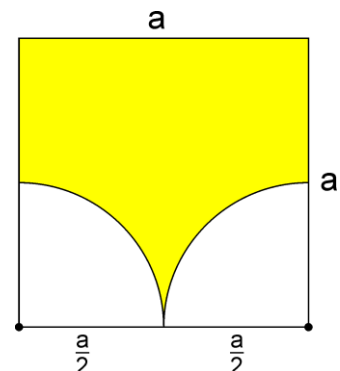
43. Bestimme Umfang und Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



44. Zeige, dass die schraffierte Fläche und das Dreieck ABC gleichen Inhalt haben.



45. Bestimme Umfang und Inhalt der farbigen Fläche in Abhängigkeit von a .

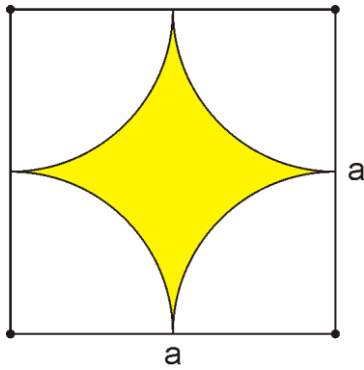


Kreis und Kreisteile

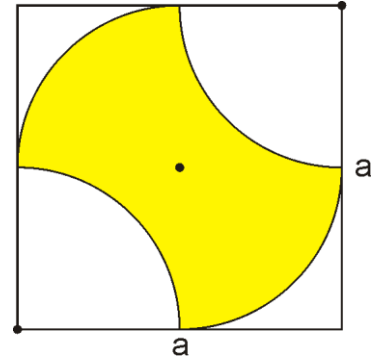
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

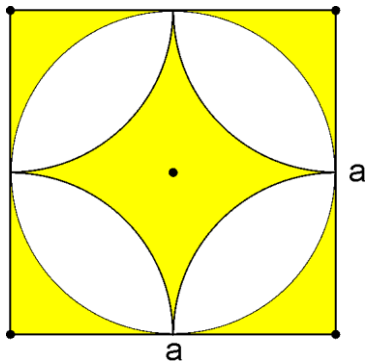
46. Bestimme Umfang und Inhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



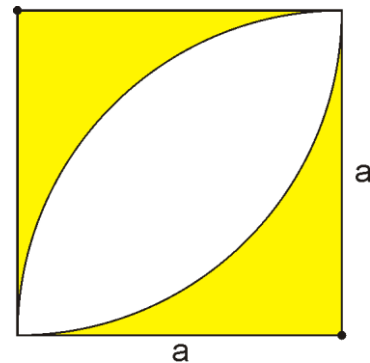
47. Bestimme Umfang und Inhalt der farbigen Fläche in Abhängigkeit von a .



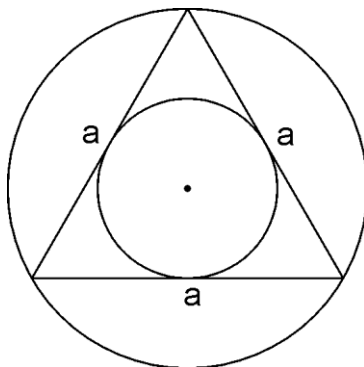
48. Bestimme den Flächeninhalt der farbigen Figur in Abhängigkeit von a .



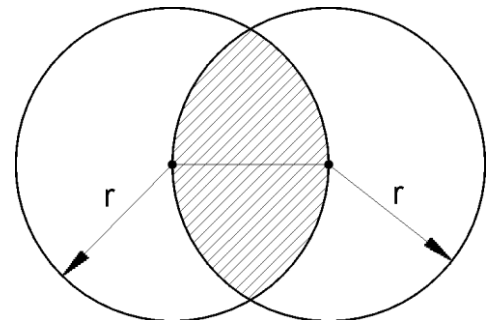
49. Bestimme den Inhalt der farbigen Fläche in Abhängigkeit von a .



50. Bestimme das Verhältnis der Radien der beiden Kreise.



51. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von r .

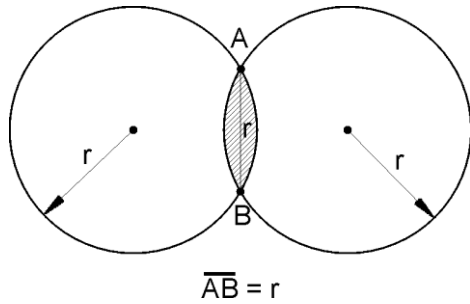


Kreis und Kreisteile

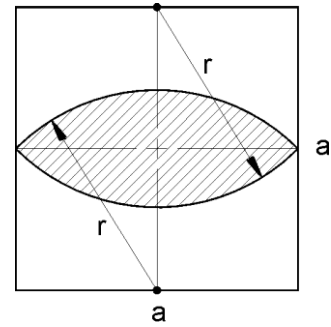
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

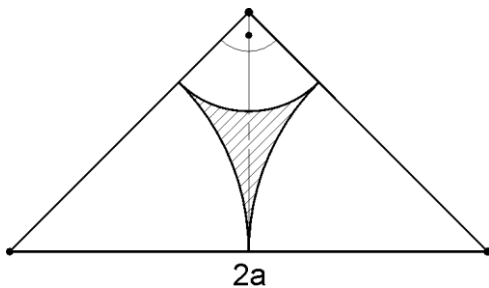
52. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von r .



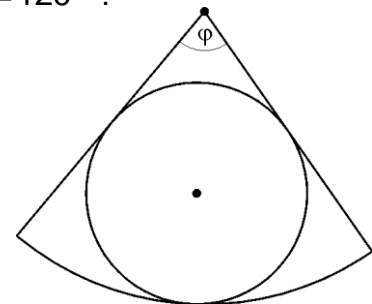
53. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



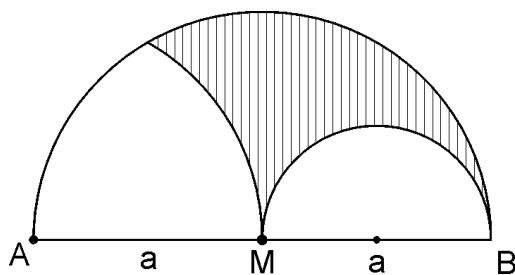
54. Bestimme Umfang und Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



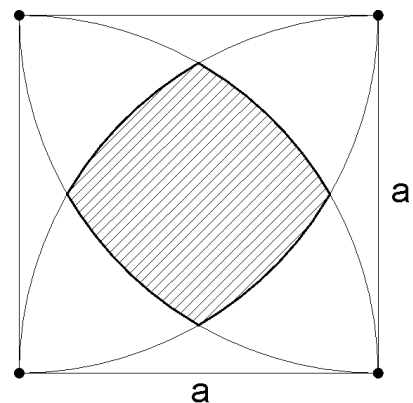
55. In einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel φ ist ein Kreis eingeschrieben. Wie viel Prozent des Sektors bedeckt die Kreisscheibe für $\varphi = 120^\circ$?



56. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .
M ist Mittelpunkt der Strecke [AB]



57. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .

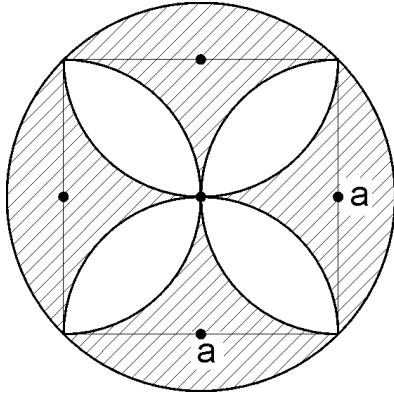


Kreis und Kreisteile

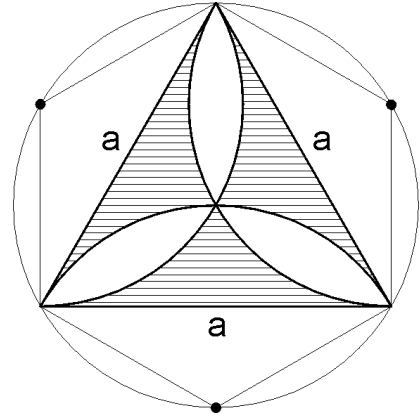
Klassen 9 / 10

- Aufgaben Teil 1 -

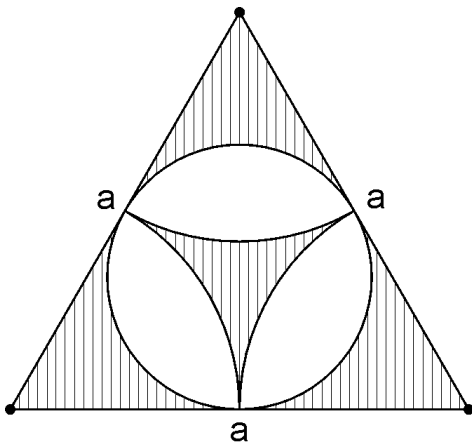
58. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



59. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



60. Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von a .



Kreis, -Sektor, -Segment (Fläche, Umfang, Bogenlänge)

1. Definitionen

Es werden folgende Symbole verwendet:

r Kreisradius

φ Sektorwinkel in Grad

d Kreisdurchmesser

x Sektorwinkel in rad

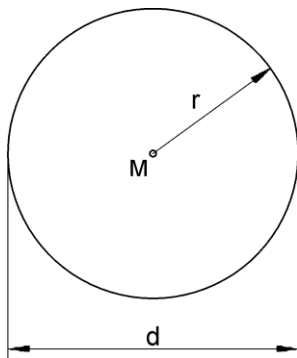
s Sehnenlänge

h Segmenthöhe

Sektorwinkel = Mittelpunktswinkel

2. Formeln

Kreis



Fläche

$$A = r^2 \pi$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

Umfang

$$U = 2 \pi r$$

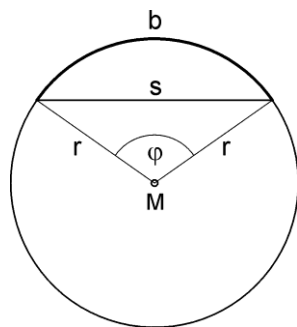
$$U = d \pi$$

Kreisradius

$$r = \frac{U}{2 \pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Bogenlänge / Sehnenlänge



Bogenlänge

$$b = 2 r \pi \frac{\varphi}{360^\circ}$$

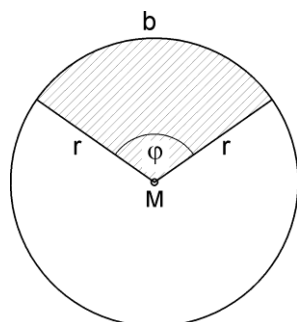
$$b = r x$$

Sehnenlänge

$$s = 2 r \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$s = 2 r \sin \frac{x}{2}$$

Kreisausschnitt - Kreissektor



Fläche

$$A = r^2 \pi \frac{\varphi}{360^\circ}$$

$$A = \frac{b r}{2}$$

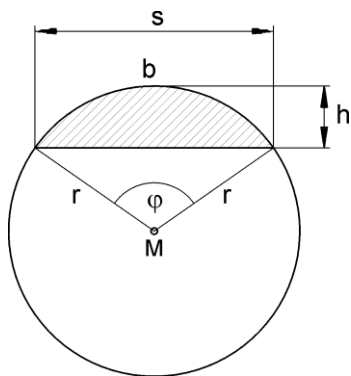
$$A = r^2 \frac{x}{2}$$

Umfang

$$U = b + 2r$$

Kreis, -Sektor, -Segment (Fläche, Umfang, Bogenlänge)

Kreisabschnitt - Kreissegment



Fläche

$$A = \frac{r^2}{2} \left(\pi \frac{\varphi}{180^\circ} - \sin \varphi \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(r^2 \pi \frac{\varphi}{180^\circ} - s(r-h) \right)$$

$$A = \frac{1}{2} [br - s(r-h)]$$

$$A = \frac{r^2}{2} (x - \sin x)$$

Kreisradius

$$r = \frac{s}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$r = \frac{h}{2} + \frac{s^2}{8h}$$

$$r = \frac{s}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Sehnenlänge

$$s = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$$

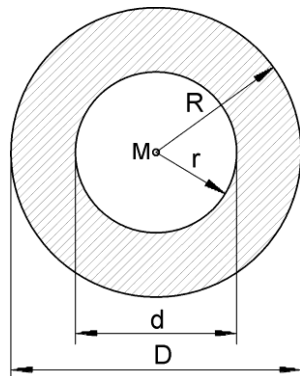
$$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$$

$$s = 2r \sin \frac{x}{2}$$

Segmenthöhe

$$h = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s^2}$$

Kreisring



Fläche

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

Umfang

$$U = 2\pi(R+r)$$

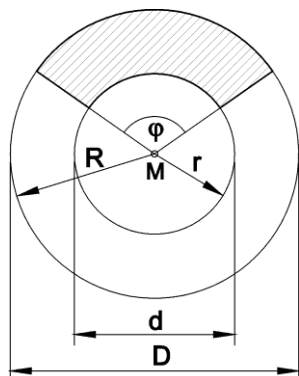
Außendurchmesser

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi} + d^2}$$

Innendurchmesser

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4A}{\pi}}$$

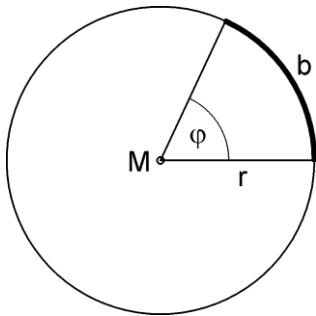
Kreisringausschnitt



Fläche

$$A = \pi(R^2 - r^2) \frac{\varphi}{360^\circ} = (R^2 - r^2) \frac{x}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \frac{\varphi}{360^\circ} = (D^2 - d^2) \frac{x}{8}$$

Kreis, -Sektor, -Segment (Fläche, Umfang, Bogenlänge)**Umrechnung / Definition Gradmaß (°) ⇔ Bogenmaß (rad)**

Die Länge des Kreisbogens ist: $b = 2 r \pi \frac{\varphi}{360^\circ}$

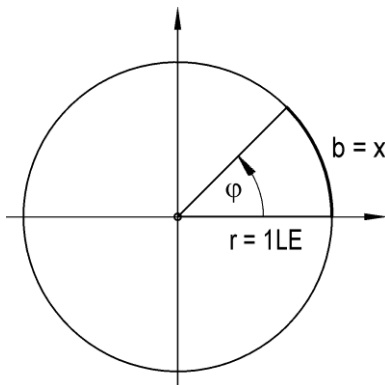
Umgeformt ergibt sich: $\frac{b}{r} = \frac{\pi \varphi}{180^\circ}$

Das zu einem Winkel φ gehörende Verhältnis $b : r$ nennt man Bogenmaß x des Winkels φ ,

$x = \frac{b}{r} = \frac{\pi \varphi}{180^\circ}$, mit der Einheit 1 Radiant (1 rad).

Hat der Kreisradius r die Länge 1 (Einheitskreis), so ist die Länge des Kreisbogens b das Bogenmaß x des Winkels φ

$x = b$ (für $r = 1 \text{ LE}$).



Wird ein Winkel im Bogenmaß angegeben, so wird dieser Winkel mit $\text{arc } \varphi$ oder x bezeichnet.

Beispiel: $x = 2,3$ oder $\text{arc } \varphi = \pi/2$

In Schulbüchern sind auch Angaben zu lesen wie:

$\alpha = 3$ oder $\varphi = 3\pi$

Dies bedeutet, die Winkelgröße ist im Bogenmaß angegeben.

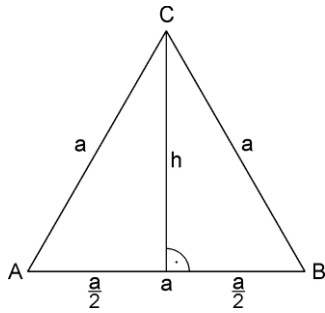
Umrechnungen:

$$\varphi^\circ = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ \cdot x$$

$$x = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \approx 0,01745 \cdot \varphi^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}$$

Kreis, -Sektor, -Segment (Fläche, Umfang, Bogenlänge)**Gleichseitiges Dreieck**

Fläche

$$A = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}}}$$

Pythagoras :

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} a^2}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{a}{2} \sqrt{3}}}$$