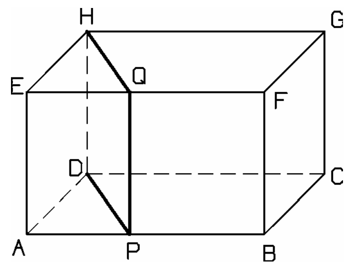
Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)

1.0 Ein Quader mit einem Rechteck als Grundfläche ist 8 cm hoch. Die zwei Seitenflächen haben den Flächeninhalt 96 cm^2 und 72 cm^2.



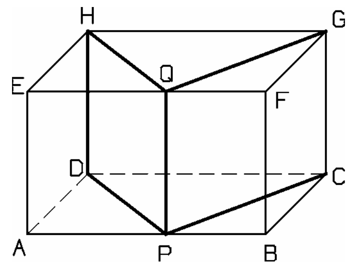
1.1 Berechne Volumen und Oberfläche des Quaders.

1.2 Die Schnittfläche DPQH (siehe Zeichnung) mit $\overline{DP} = \sqrt{130}\,\text{cm}$ trennt den Quader in zwei Teilkörper.

1.3 Berechne das Volumen des Prismas PBCDQFGH.

1.4 Bestimme seine Oberfläche.

1.5 Der Quader ABCDEFGH aus Aufgabe 1.0 wird durch die beiden Schnitte PCGQ und DPQH in drei Teilkörper zerlegt (siehe Zeichnung).
Berechne die Länge [AP] = x so, daß sich die Volumina der Teilkörper PBCQFG und DPCHQG wie 1: 3 verhalten.



2. Das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge a ist Grundfläche eines Prismas bei dem die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche übereinstimmen.
Berechne die Mantelfläche des Prismas allgemein und dann für a = 8 cm.

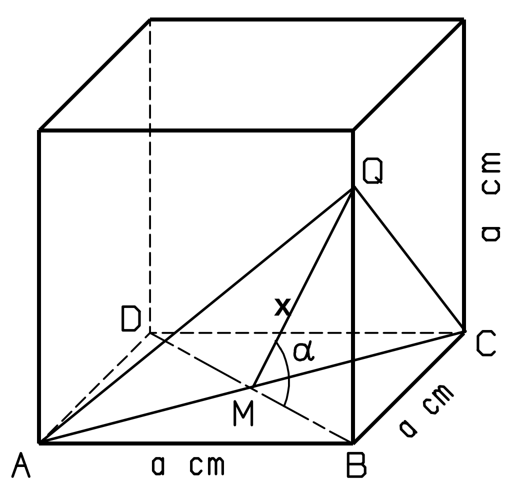
3.0 Gegeben ist der Quader ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm und $\overline{AE} = 5$ cm.
Zeichne ein Schrägbild des Quaders.
Für die Zeichnung: q = 0,5, $\omega = 45°$.

3.1 Auf der Kante [BF] liegt ein Punkt P_n. Zusammen mit den Punkten A und C erhält man Dreiecke ACP_n. Zeichne das Dreieck ACP_1 für $[BP_1] = 3{,}5$ cm in das Schrägbild.
Es gilt: $\sphericalangle P_nCB = \varepsilon$. Bestimme den größten Winkel $P_nCB = \varepsilon_{max}$.

3.2 Berechne die Maße der Innenwinkel und die Seitenlängen [AC], $[AP_2]$ und $[CP_2]$ des Dreiecks ACP_2 für den Winkel P_2CB mit dem Maß $\varepsilon = 20°$.

3.3 Ermittle den Neigungswinkel φ des Dreiecks ACP gegen die Grundfläche für $\varepsilon = 20°$.

4.0 Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a gemäß nebenstehender Skizze.



4.1 Berechne die Höhe $\overline{MQ} = x$ cm der gleichschenkligen Dreiecke ACQ in Abhängigkeit von a und α.

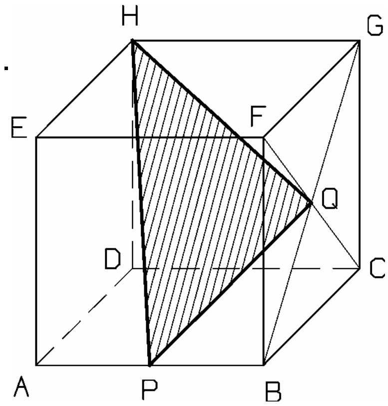
(Ergebnis: $x = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$)

4.2 Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ACQ in Abhängigkeit von a und α.

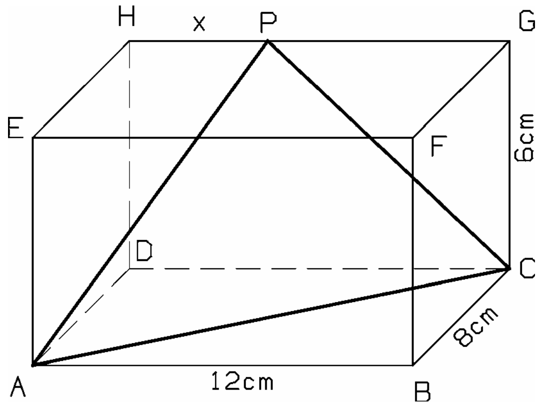
4.3 Das Dreieck ABC ist Grundfläche von Pyramiden ABCQ.
Berechne das Volumen der Pyramiden in Abhängigkeit von a und α.

Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)

5. Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a = 4 cm.
Q ist Mittelpunkt der Seitenfläche BCGF (siehe Zeichnung).
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks PQH
für $\overline{AP} = \overline{PB}$.



6.0 Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH
mit dem Dreieck ACP und
$\overline{AB} = 12\,\text{cm};\quad \overline{BC} = 8\,\text{cm};\quad \overline{AE} = 6\,\text{cm};$
$P \in \overline{HG}$ mit $\overline{HP} = x$



6.1 Bestimme die Längen $\overline{AP}_{(x)}$ und $\overline{CP}_{(x)}$
in Abhängigkeit von x.

6.2 Berechne die Fläche des Dreiecks ACP
für x = 4.

6.3 Stelle eine Gleichung auf für den Flächeninhalt des Dreiecks ACP in Abhängigkeit von x (für Fortgeschrittene empfohlen).

siehe auch Aufgabe 5 !

7.0 Ein Quader ABCDEFGH ist festgelegt durch die Kantenlängen
$\overline{AB} = 6\,\text{cm};\quad \overline{BC} = 8\,\text{cm};\quad \overline{AE} = 5\,\text{cm}.$

7.1 Zeichne ein Schrägbild mit q = 0,5 und ω = 60°.
Die Diagonale AC soll auf der Schrägbildachse liegen.

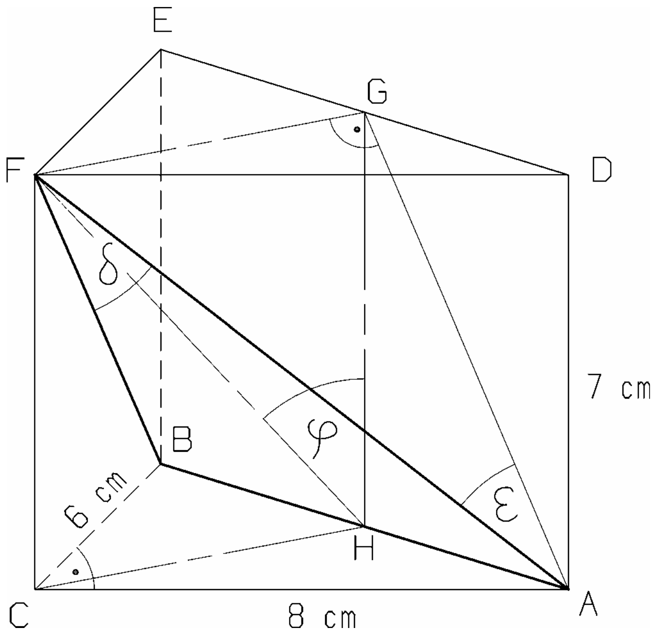
7.2 Die Raumdiagonale [CE] bildet mit der Grundfläche den Winkel ε und mit [BC] den Winkel φ. Berechne die beiden Winkelmaße.

7.3 Die Raumdiagonalen [CE] und [BH] schneiden sich im Punkt M.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCM.

7.4 Der Neigungswinkel des Dreiecks ACF sei μ . Berechne das Maß von μ .

7.5 Berechne den Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ACF.

Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)



8.0 Das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines Prismas ABCDEF mit $\overline{AD} = 7\,\text{cm}$.

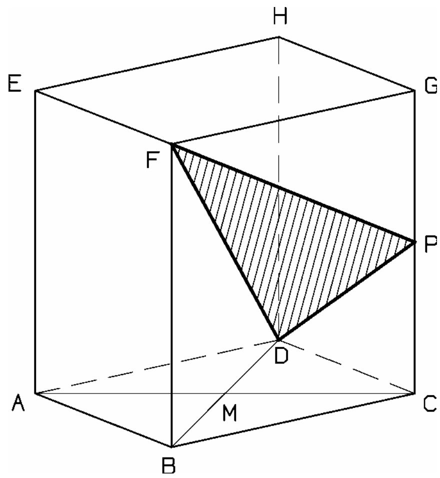
8.1 Zeichne ein Schrägbild mit q = 0,5 und ω = 45° so daß die Seite [CA] auf der Schrägbildachse liegt.

8.2 Berechne Oberfläche und Volumen des Prismas.

8.3 Die Ebene BAF schneidet das Prisma. Berechne Umfang und Fläche der Schnittfigur.

8.4 Bestimme das Maß des Winkels φ zwischen der Fläche ADEB und der Ebene BAF.

8.5 Bestimme das Maß des Winkels ε zwischen der Fläche ADEB und der Geraden AF.



9.0 Die Raute ABCD mit $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 8\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas ABCDEFGH mit der Höhe $\overline{AE} = 8\,\text{cm}$.

9.1 Zeichne ein Schägbild des Prismas mit q = 0,5 und ω = 45°.
[AC] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

9.2 Berechne das Maß γ des Winkels DCB.

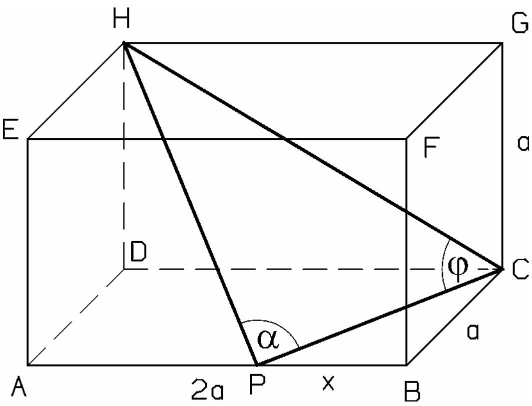
9.3 Berechne die Oberfläche des Prismas ABCDEFGH.

9.4 Der Punkt P ist Mittelpunkt der Kante [CG].
Zeichne den Punkt P und das dazugehörige Dreieck DPF in das Schrägbild ein.

9.5 Berechne die Längen der Dreieckseiten [DP], [DF] und [FP] sowie die Innenwinkel des Dreiecks.

Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)

10.0 Die nebenstehende Zeichnung zeigt einen Quader ($\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CG} = a$), bei dem sich ein Punkt P von B nach A bewegt ($\overline{PB} = x$).



10.1 Berechne die Streckenlängen $\overline{CH}$, $\overline{PC}$ und $\overline{PH}$ in Abhängigkeit von a und x.

10.2 Bestimme den Term cos φ in Abhängigkeit von x.

10.3 Für welchen Wert für x wird $\varphi = 60°$? Berechne für diesen Wert das Winkelmaß α. Bestimme für diesen Fall den Flächeninhalt des Dreiecks PCH.

Rechne mit a = 6 !

Raumgeometrie - Prisma

1.0 Die Grundfläche eines 8 cm hohen, regulären (regelmäßigen) Prismas ist ein Dreieck mit der Seitenlänge a = 5 cm.

1.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas ($q = 0{,}5$, $\omega = 60°$).

1.2 Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen.

2.0 Ein gerades Prisma mit der Höhe 9 cm hat ein reguläres (regelmäßiges) Sechseck mit jeweils 5 cm langen Seiten als Grundfläche.

2.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas für $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$. Eine Diagonale des Sechsecks soll dabei auf der Rissachse liegen.

2.2 Wie groß sind Volumen und Oberfläche des Prismas ?

3. Die Oberfläche eines geraden Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche hat den Inhalt $102{,}5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Die Prismenhöhe beträgt $6\sqrt{3}$ cm. Berechne die Länge a der Grundkante.

4.0 Die Oberfläche eines regulären (regelmäßigen) achtseitigen Prismas ist 240 cm^2.

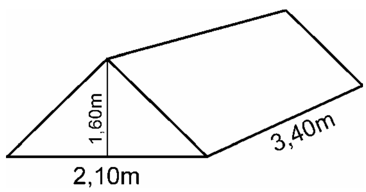
4.1 Berechne die Höhe h für die Grundkantenlänge a = 4 cm.

4.2 Berechne h allgemein in Abhängigkeit von a.

5. Berechne das Volumen eines geraden Prismas in Abhängigkeit von a.
Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 3a und 1,2a.
Die Prismenhöhe ist doppelt so groß wie die Länge der Hypotenuse der Grundfläche.

6. Ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{AD} = 6$ cm und $\measuredangle BAD = 60°$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit 14 cm Höhe. Berechne das Volumen.

7.0 Ein Zelt hat die Form eines liegenden Prismas, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist. Die Bodenfläche des Zeltes ist 3,40 m lang und 2,10 m breit. Das Zelt hat eine Höhe von 1,60 m.



7.1 Berechne den Rauminhalt des Zeltes.

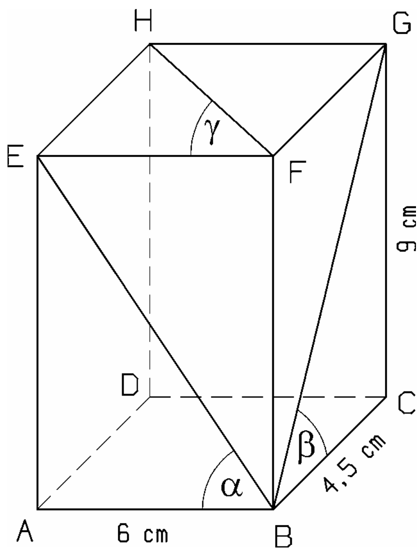
7.2 Wieviel m^2 Stoff sind für die Herstellung dieses Zeltes einschließlich des Bodens notwendig ?

Raumgeometrie - Prisma

8.0 Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen 6 cm, 4,5 cm und 9 cm

8.1 Berechne die Längen der eingezeichneten Diagonalen $\overline{BE}$, $\overline{BG}$ und $\overline{FH}$.

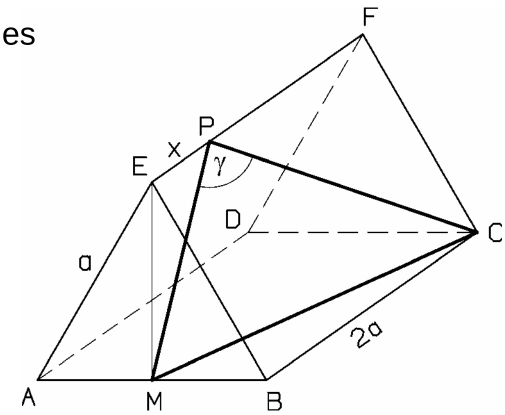
8.2 Wie groß sind die Winkel α, β und γ (rechnerischer Nachweis).



9.0 Berechne für den Quader aus Aufgabe 8 die Länge der Raumdiagonalen $\overline{BH}$ und das Maß δ des Neigungswinkels den diese Raumdiagonale mit der Grundfläche einschließt.

9.1 Bestimme ebenso das Maß ε des Neigungswinkels der Raumdiagonalen eines Würfels gegen die Grundfläche.

10.0 Die nebenstehende Skizze ist ein gerades, liegendes Prisma mit gleichseitigem Dreieck ABE als Grundfläche ($\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE} = a$).
Auf der Kante $\overline{EF}$ bewegt sich ein Punkt P von E nach F.



10.1 Berechne die Streckenlängen $\overline{MP}$, $\overline{PC}$ und $\overline{MC}$ in Abhängigkeit von a und x.

10.2 Für welchen Wert für x gilt $\overline{MP} = \overline{PC}$?

10.3 Berechne den Term $\cos\gamma$ in Abhängigkeit von a und x.

10.4 Bestimme den Wert für x, für den $\gamma = 90°$ gilt !

10.5 Berechne das Maß γ für die Teilaufgabe 10.2 !

10.6 Ermittle das Maß des Winkels PCM für die Teilaufgabe 10.5 !

10.7 Berechne für die Teilaufgabe 10.6 den Flächeninhalt A des Dreiecks MCP !

Raumgeometrie - Prisma (Würfel, Quader)

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Ein gerades Prisma ist 40 cm hoch und hat ein rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche. Die Katheten des Dreiecks sind 15 cm und 9 cm lang.
Man erhält neue Prismen, wenn man die 9 cm Kathete um x cm verlängert und gleichzeitig die 15 cm Kathete um x cm verkürzt. In jedem Fall bleibt die Höhe gleich.

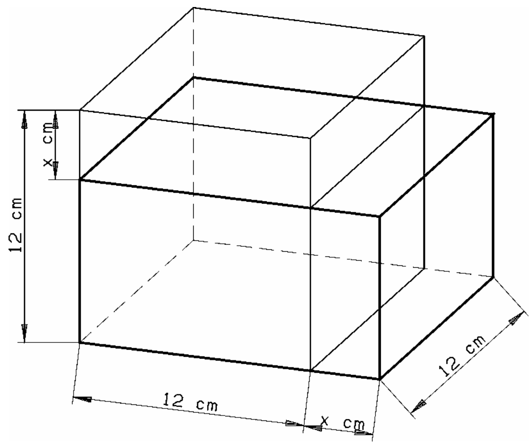
1.1 Wie ist der Definitionsbereich; d.h. welche Werte für x können sinnvoll eingesetzt werden?

1.2 Gib eine Gleichung für das Volumen $V_{(x)}$ der Prismen in Abhängigkeit von x an.
(Ergebnis: $V_{(x)} =(- 20x^2 + 12x + 2700)\ cm^3$

1.3 Welcher Wert für x erzeugt das Prisma mit dem größten Volumen (Extremwert) ?

1.4 Bestimme die Mantelfläche $M_{(x)}$ des Prismas in Abhängigkeit von x.
(Ergebnis: $M_{(x)} = (960 + 40\sqrt{2x^2 - 12x + 306}\ )\ cm^2$

2.0 Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 12cm. Es entstehen Quader, wenn man eine Kante um x cm verkürzt und gleichzeitig eine andere Kante um x cm verlängert.

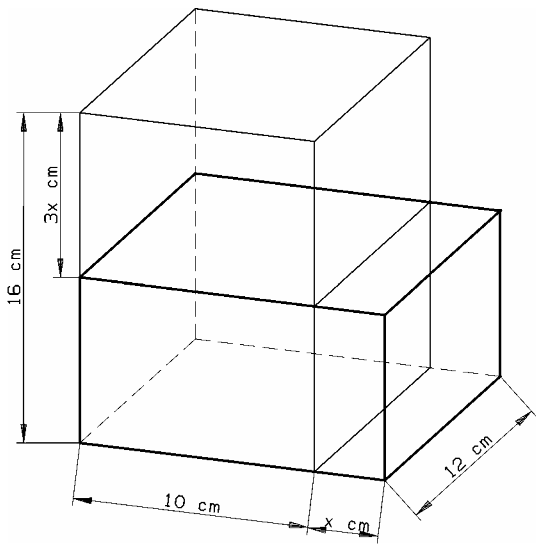


2.1 Stelle das Volumen der entstehenden Quader in Abhängigkeit von x dar.
(Ergebnis: $V_{(x)} = (- 12x^2 + 1728)\ cm^3$)

2.2 Stelle die Oberfläche der Quader in Abhängigkeit von x dar.
(Ergebnis: $O_{(x)} = (- 2x^2 + 864)\ cm^2$)

2.3 Man kann sofort das größte Volumen und die größte Oberfläche der entstehenden Quader bestimmen. Wie groß ist in beiden Fällen der x-Wert ?

3.0 Ein Quader mit den Grundkanten 10 cm und 12 cm hat eine Höhe von 16 cm. Es entstehen neue Quader wenn man die Höhe um 3x cm verkürzt und gleichzeitig die 10 cm lange Grundkante um x cm verlängert.

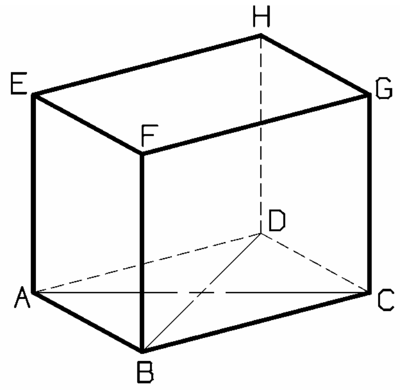


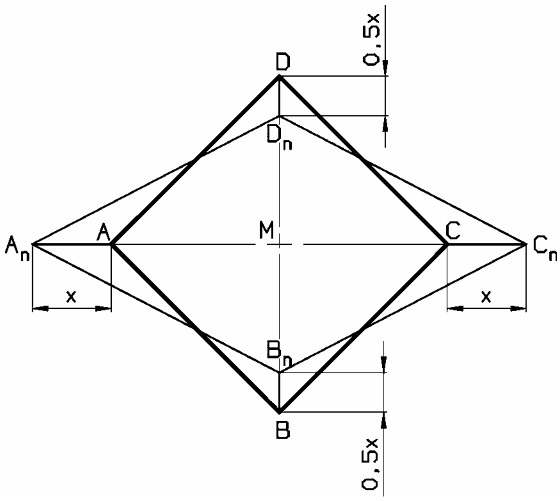
3.1 Stelle das Volumen der neuen Quader in Abhängigkeit von x dar.
[Ergebnis: $V_{(x)} = (- 36x^2 -168x + 1920)\ cm^3$]

3.2 Wie lautet der x-Wert für das größte Volumen ? Vergleiche den gefundenen Wert mit dem Definitionsbereich.

3.3 Hat der Quader mit dem größten Volumen auch gleichzeitig die größte Oberfläche ?
(Teilergebnis: $O_{(x)} = (- 6x^2 - 76x + 944)\ cm^2$)
Vergleiche den gefundenen Wert mit dem Definitionsbereich.

4.0 Die Grundfläche eines geraden Prismas (Quader) ABCDEFGH ist ein Quadrat mit der Diagonalenlänge $6\sqrt{2}$ cm. Die Höhe beträgt 8 cm. Verlängert man die Diagonale [AC] von A und C aus um jeweils x cm und verkürzt man gleichzeitig die Diagonale [BD] von B und D aus um jeweils 0,5x cm, so erhält man neue Prismen mit den Grundflächen $A_nB_nC_nD_n$. Die Prismenhöhe bleibt stets unverändert.





4.1 Gib eine Gleichung für das Volumen $V_{(x)}$ der Prismen in Abhängigkeit von x an.
Welches geometrisch sinnvolle Intervall kann der Wert für x annehmen ?
[Ergebnis: $V_{(x)} = (-8x^2 + 24\sqrt{2} \cdot x + 288)$ cm^3]

4.2 Berechne den Wert für x, für den man ein Prisma mit dem Volumen V = 320 cm^3 erhält.

4.3 Berechne den Wert für x, für den man das maximale Prisma V_{max} erhält und gib den Wert für V_{max} an.

4.4 Gib eine Gleichung für die Oberfläche der Prismen $O_{(x)}$ in Abhängigkeit von x an.

5.0 Ein Quader ABCDEFGH hat die Seitenlängen [AB] = 12 cm, [BC] = 8 cm und die Höhe [AE] = 10 cm. Verkürzt man die Grundkanten [AB] und [DC] jeweils von A bzw. D aus um x cm und verlängert gleichzeitig die Grundkanten [AD] bzw. [BC] über D und C hinaus um 2 x cm, so erhält man neue Quader $A_nBC_nD_nE_nFG_nH_n$.
Die Höhe der Quader ist stets unverändert.

5.1 Gib die Oberfläche $O(x)$ der Quader in Abhängigkeit von x an.
In welchem Intervall kann sich x bewegen ?
[Ergebnis: $O(x) = 4(-x^2 + 12x + 148)$ cm^2]

5.2 Für welchen x-Wert erhält man Quader mit einem Oberflächeninhalt von 700 cm^2.

5.3 Berechne das Volumen $V(x)$ der Quader in Abhängigkeit von x.

5.4 Bestimme die x-Werte für die man Quader mit V = 1 000 cm^3 erhält.

5.5 Ermittle das größte Volumen und den zugehörigen x-Wert.

5.6 Gib eine Gleichung für die Raumdiagonale $[BH_n]$ in Abhängigkeit von x an.

5.7 Durch die Raumdiagonale $[BH_n]$, die Grundflächendiagonale $[BD_n]$ und die Seitenkante $[D_nH_n]$ werden Dreiecke BH_nD_n festgelegt.
Stelle die Flächeninhalte $A(x)$ der Dreiecke BH_nD_n in Abhängigkeit von x dar.

6.0 Gegeben ist das Prisma ABCDEFGH mit der Höhe h = 6 cm und der Raute ABCD als Grundfläche mit $\overline{AC}$ = 10 cm und $\overline{BD}$ = 18 cm.

6.1 Zeichne das Schrägbild des Prismas so, dass die Diagonale [BD] auf der Schrägbildachse liegt (Blatt quer nehmen).
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

6.2 Berechne die Oberfläche des Prismas ABCDEFGH auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

6.3 Es entstehen neue Prismen, in dem man die Diagonale [BD] von B und D aus um jeweils x cm verkürzt und die Höhe des Prismas um x cm verlängert.
Zeichne das Prisma für x = 3 in das Schrägbild zu 7.1 ein.

6.4 Gib die maximale Grundmenge für x an.

6.5 Berechne das Volumen der neuen Prismen in Abhängigkeit von x.
[Teilergebnis: $V_{(x)} = (-10x^2 + 30x + 540)\ cm^3$]

6.6 Für welche Werte von x erhält man Prismen, deren Volumen größer als 500 cm^3 ist ?
(Rechnerische Lösung erforderlich !)

Raumgeometrie - gerade Pyramide

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 7 cm ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe h = 8 cm. S ist die Pyramidenspitze.

1.1 Fertige ein Schrägbild der Pyramide ABCDS an.

1.2 Berechne die Länge der Kante [CS].

1.3 Bestimme das Volumen V der Pyramide.

1.4 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

2.0 Die gerade Pyramide ABCDS mit der quadratischen Grundfläche ABCD und der Höhe h = 8 cm besitzt die Kante [CS] mit der Länge $\overline{CS}$ = 10 cm. S ist die Pyramidenspitze.

2.1 Fertige ein Schrägbild der Pyramide ABCDS an.
Für die Zeichnung: [AB] = 8,5 cm soll auf der Rißachse liegen.

2.2 Berechne die Länge der Strecke [AC].

2.3 Berechne das Volumen V der Pyramide ABCDS.

2.4 Berechne die Oberfläche der Pyramide ABCDS.

3.0 Die Raute ABCD mit $\overline{AC}$ = 12 cm und $\overline{BD}$ = 8 cm ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$ = 10 cm. Dabei ist M der Schnittpunkt der Diagonalen [AC] und [BD]. S ist die Pyramidenspitze.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit q = 0,5 und ω = 45°, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

3.2 Berechne das Maß φ des Winkels MSC, den die Seitenkante [CS] mit der Höhe einschließt, sowie die Länge von [CS] jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

3.3 Berechne das Maß γ des Winkels BSC auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

4.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 7cm ist Grundfläche einer 9cm hohen geraden Pyramide.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit q = 0,5 und ω = 45°. Die Seite [CD] liegt auf der Rißachse s.

4.2 Berechne das Maß α des Neigungswinkels einer Seitenkante gegen die Grundfläche.

4.3 Berechne das Maß β des Neigungswinkels einer Seitenfläche gegen die Grundfläche.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

5.0 Gegeben ist eine gerade Pyramide ABCDS mit der Höhe h = 10 cm und der quadratischen Grundfläche ABCD. Das Pyramidenvolumen beträgt 160 cm^3.
Der Pyramide wird ein Quader mit der quadratischen Grundfläche EFGH so einbeschrieben, dass die Seitenkanten der Quadergrundfläche parallel sind mit den Seitenkanten der Pyramidengrundfläche.
Die Höhe h_Q des Quaders beträgt 40% der Pyramidenhöhe h.

5.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide mit dem einbeschriebenen Quader mit q = 0,5; ω = 45°. Die Seite [CD] soll auf der Rißachse liegen.

5.2 Berechne das Volumen des Quaders.

6.0 Das Quadrat ABCD (Seitenlänge a) ist Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe h = 2a, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates ABCD liegt.

6.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide für a = 5 cm; ω = 45°; q = 0,5;
[AB] liegt auf der Schrägbildachse.

6.2 Bestimme die Länge $s(a)$ der Seitenkante sowie den Flächeninhalt $A(a)$ einer Seitenfläche in Abhängigkeit von a.

[Ergebnis: $s(a) = 1{,}5\sqrt{2}\,a$ LE $A(a) = \frac{\sqrt{17}}{4}a^2$ FE]

6.3 Weise nach, dass das Maß des Neigungswinkels α der Seitenfläche gegen die Grundfläche unabhängig von der Belegung von a ist.
Gib das Maß des Neigungswinkels α an.

6.4 Bestimme die Belegung von a, so dass sich für die Oberfläche der Pyramide der Flächeninhalt A = $36\left(\sqrt{17}-1\right)cm^2$ ergibt.

6.5 Bestimme das Volumen der Pyramide für a = 6 cm.
Für welche Belegung von a beträgt das Volumen der Pyramide 486 cm^3 ?

7.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB}$ = 10 cm und $\overline{BC}$ = 8 cm ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Rechtecks ABCD liegt. Die Höhe h = MS ist 12 cm lang.

7.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS.
Für die Zeichnung: ω = 30°; q = 0,5; [AB] liegt auf der Schrägbildachse.

7.2 Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

7.3 Die Pyramide ABCDS wird durch einen ebenen Schnitt parallel zur Grundfläche in einen Pyramidenstumpf und eine Pyramide zerlegt. In welcher Höhe muss der Schnitt erfolgen, damit die beiden Teilkörper gleiches Volumen haben ?

Raumgeometrie - gerade Pyramide

8.0 Die Grundfläche der Pyramide ABCDS ist das Rechteck ABCD mit den Längen $\overline{AB} = 7\text{cm}$ und $\overline{BC} = 8\text{cm}$. M ist der Mittelpunkt von [BC] , N ist der Mittelpunkt von [AD], O ist der Diagonalenschnittpunkt. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt O. Es gilt : $\overline{OS} = 10\text{ cm}$.

8.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [MN] auf der Schrägbildachse liegt; q = 0,5; $\omega = 45°$.

8.2 Berechne die Oberfläche der Pyramide ABCDS !

8.3 Berechne das Maß α des Neigungswinkels der Seitenfläche BCS zur Grundfläche ABCD, sowie das Maß β des Winkels CBS !

(Ergebnis: $\alpha = 70{,}71°$)

8.4 Auf [MS] liegen die Punkte P_n. Zeichne das Dreieck AP_1D für $\overline{MP_1} = 2\text{ cm}$ ein, und berechne das Maß γ_1 des Winkels MNP_1, sowie das Maß δ des Winkels DP_1A !

(Ergebnisse: $\overline{NP_1} = 6{,}61\text{cm}$; $\gamma_1 = 16{,}58°$)

8.5 Der Winkel MNP_2 hat das Maß $\gamma_2 = 60°$. Trage P_2 ein und berechne die Länge $\overline{MP_2}$.

9.0 Das gleichseitige Dreieck ABC mit $\overline{AB}$ = a = 6 cm ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCS mit $\overline{AS}$ = s = 9 cm. M ist der Mittelpunkt von [AC].
F ist Fußpunkt der Pyramidenhöhe h (und gleichzeitig auch Schnittpunkt der Höhenlinien im Dreieck ABC).

9.1 Zeichne ein Schrägbild mit MB als Schrägbildachse, $\omega = 45°$ und q = 0,75.
Für die Zeichnung: h = 8,3 cm

9.2 ε sei der Winkel zwischen [BS] und der Grundfläche, φ der Winkel zwischen [BS] und [AB] und μ der Winkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche.
Berechne die Maße der drei Winkel.

9.3 Von A und C aus werden Lote auf [BS] gefällt. Sie schneiden [BS] in P.
Berechne $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$.

9.4 τ sei der Winkel zwischen den Seitenflächen ABS und CBS.
Berechne das Maß von τ.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

10.0 Bei einer Pyramide ABCDS mit dem Quadrat ABCD als Grundfläche liegt die Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates. Die Höhe der Pyramide beträgt $\sqrt{46}$ cm, die Seitenkanten sind 8cm lang.

10.1 Berechne die Länge der Grundkante und das Volumen der Pyramide.
(Teilergebnis: $\overline{AB} = 6\text{cm}$)

10.2 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$.

10.3 Berechne das Maß β des Neigungswinkels SBD der Seitenkante [BS] gegenüber der Grundfläche.
(Ergebnis: $\beta = 57{,}97°$)

10.4 Berechne die Maße der Innenwinkel des Seitendreiecks BCS der Pyramide.
(Teilergebnis: $\sphericalangle CBS = 67{,}98°$)

10.5 Berechne die Mantelfläche der Pyramide ABCDS.

10.6 Auf der Seitenkante [BS] liegen die Punkte P_n von Dreiecken ACP_n.
Zeichne ein derartiges Dreieck in das Schrägbild ein.
Unter den Dreiecken gibt es ein Dreieck ACP_0 mit minimalem Flächeninhalt.
Berechne diesen Flächeninhalt.
Berechne ferner die Länge der Strecke $[BP_1]$, wobei der Flächeninhalt des Dreiecks MBP_1 10 cm² beträgt.

11.0 Eine Pyramide ABCDS hat eine quadratische Grundfläche (Seitenlänge 6 cm) und die Höhe $h = 3\sqrt{6}$ cm. Auf der Kante [CS] wandert ein Punkt X.

11.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$.
[AB] soll auf der Schrägbildachse liegen.
Kennzeichne den Diagonalenschnittpunkt mit M und zeichne eine beliebige Strecke [MX] ein.

11.2 Berechne den Neigungswinkel φ einer Seitenkante gegen die Grundfläche.

11.3 Der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und der Strecke [MX] wird mit α bezeichnet. Zeige das gilt: $\overline{MX} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2 \cdot \sin(60° + \alpha)}$

11.4 Für welches α erhält man die kleinste Streckenlänge [MX] ?

11.5 Zeige daß gilt: $\overline{CX} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot \tan\alpha}{\sqrt{3} + \tan\alpha}$

Begründe geometrisch, daß $\overline{CX}$ für $\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$ nicht definiert ist.

11.6 Für welches α beträgt die Fläche des Dreiecks DBX $9\sqrt{6}\ \text{cm}^2$?

Raumgeometrie - gerade Pyramide

12.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS. Ihre Seitenkanten sind ebenfalls a cm lang.
Eine Ebene BDP mit $P \in [AS]$ schneidet aus der Pyramide gleichschenklige Dreiecke BDP aus. Die Länge der Strecke $\overline{AP}$ beträgt z cm.

12.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit einem gleichschenkligen Dreieck BDP.
Für die Zeichnung: a = 9; q = 0,5; ω = 30°; Schrägbildachse CD.

12.2 Berechne die Länge der Dreiecksseite $\overline{BP}$ = y cm in Abhängigkeit von a und z !

12.3 Der Winkel an der Spitze der gleichschenkligen Dreiecke BDP hat das Maß ε.
Berechne cos ε in Abhängigkeit von a und z !

12.4 Bestimme mit Hilfe des Terms cos ε aus Teilaufgabe 12.3 die Winkelmaße ε für a = 9 und $z \in [0; 9]$ mit $\Delta z = 1{,}5$!

13.0 Die Raute ABCD mit $\overline{AC}$ = 14 cm und $\overline{BD}$ = 8 cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$ = 8 cm. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen [AC] und [BD] der Raute ABCD.

13.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS. Die Rautendiagonale [BD] soll auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: q = 0,5; ω = 45°

13.2 Berechne das Maß ε des Winkels, den die Seitenkante [BS] mit der Grundfläche einschließt.
[Ergebnis: ε = 63,43°]

13.3 Die Punkte Q_n auf der Pyramidenkante [BS] sind Eckpunkte von Dreiecken DMQ_n.
Zeichne das Dreieck DMQ_1, das man für $\overline{BQ_1}$ = 7 cm erhält, in die Zeichnung ein.
Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks DMQ_1 sowie die Längen der Dreiecksseiten $[DQ_1]$ und $[MQ_1]$.

13.4 Der Winkel MDQ_2 hat das Maß φ_2 = 35°.
Zeichne das Dreieck DMQ_2 in die Zeichnung ein.
Berechne die Länge der Strecke $[BQ_2]$.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

14.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalenlängen $\overline{AC} = 10$ cm und $\overline{BD} = 8$ cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M mit $\overline{MS} = 10$ cm liegt.

14.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

14.2 Berechne das Maß γ des Winkels ASC sowie die Länge der Kante [AS].
[Ergebnis: $\gamma = 53{,}13°$; $\overline{AS} = 11{,}18$ cm]

14.3 Der Punkt E auf [AS] mit $\overline{AE} = 6{,}5$ cm, der Punkt C, der Punkt F auf [BS] und der Punkt G auf [DS] sind die Eckpunkte des Vierecks EFCG, wobei [FG] parallel zu [BD] verläuft. Die Diagonalen [EC] und [FG] des Vierecks EFCG schneiden sich im Punkt T auf [MS].
Zeichne das Viereck EFCG mit seinen Diagonalen in das Schrägbild ein.

14.4 Berechne das Maß φ des Winkels CES und die Länge der Strecke [ST].

14.5 Berechne die Streckenlänge [FG] und das Volumen der Pyramide EFCGS.

15.0 Bei einer geraden Pyramide ABCDS mit $\overline{AB} = 3b$ cm und $\overline{BC} = 2b$ cm beträgt die Länge einer Seitenkante 4b cm.

15.1 Zeichne ein Schrägbild mit $q = 0{,}5$ und $\omega = 45°$ für $b = 2$. Rißachse : [AB].
(Für die Zeichnung: Pyramidenhöhe $h = 7$ cm)

15.2 Für die Punkte Z_n gilt: $Z_n \in [AB]$ oder $Z_n \in [BC]$.
Gib die Länge der Strecken $[DZ_n]$ in Abhängigkeit von b und β an,
wenn $\sphericalangle ADZ_n = \beta$.

15.3 Berechne die Fläche der Dreiecke DSZ_n in Abhängigkeit von b und β .

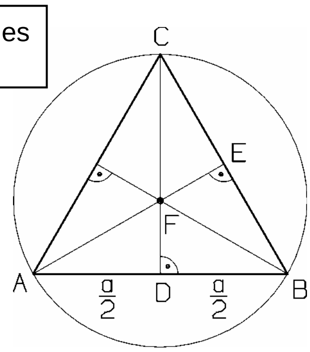
15.4 Berechne den Winkel β^*, für den die Fläche des Dreiecks DSZ_n maximal wird. Begründe das Ergebnis.

15.5 Berechne den Winkel, den die gegenüberliegenden Seitenflächen jeweils miteinander einschließen.

Raumgeometrie - gerade Pyramide (Tetraeder)

1.0 Eine dreiseitige Pyramide bei der alle Kanten gleich lang sind (die von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird) wird als Tetraeder bezeichnet.
Die Spitze S des Tetraeders liegt senkrecht über dem Mittelpunkt F der Grundfläche.
Der Mittelpunkt F ist der Schnittpunkt der Schwerelinien (Schwerpunkt) des gleichseitigen Grundflächendreiecks und zugleich auch Mittelpunkt des Umkreises (und Inkreises) des Grundflächendreiecks.

Grundfläche des Tetraeders



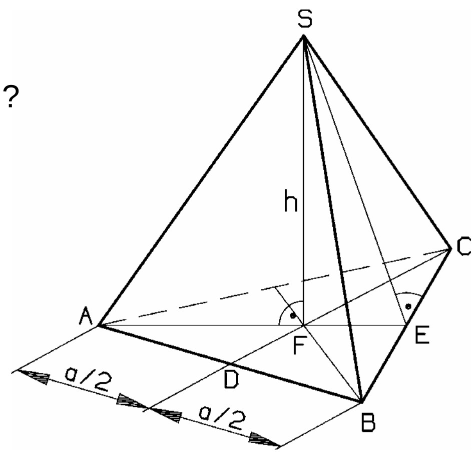
1.1 Berechne die Länge der Strecke [AF] in Abhängigkeit von der Kantenlänge a.

1.2 Wie groß ist die Tetraederhöhe in Abhängigkeit von a ?

1.3 Stelle eine Gleichung für das Volumen in Abhängigkeit von a auf.

1.4 Bestimme die Oberfläche des Tetraeders in Abhängigkeit von a.

1.5 Dem Tetraeder wird eine Kugel umbeschrieben und eine Kugel einbeschrieben.
Gib das Verhältnis der Volumina beider Kugeln an ($V_{umbeschrieben} : V_{einbeschrieben}$)



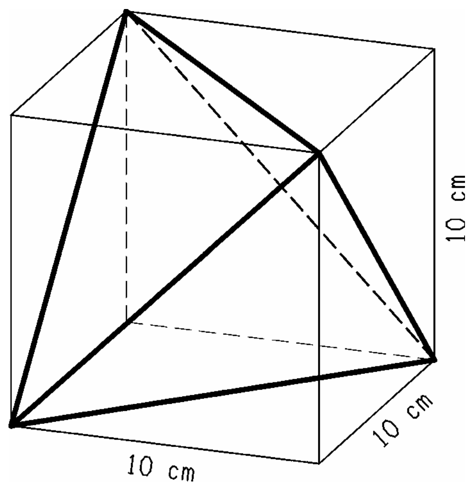
2.0 In einem Würfel mit 10 cm Kantenlänge sind die 6 Diagonalen der Seitenflächen die Seitenkanten eines Tetraeders.

2.1 Berechne das Volumen des Tetraeders.

2.2 Berechne die Oberfläche des Tetraeders.

2.3 Ermittle den Neigungswinkel φ den eine Seiten**fläche** gegen die Grundfläche aufweist.

2.4 Wie groß ist der Neigungswinkel ε einer Seiten**kante** gegen die Grundfläche ?



3. Eine Tetrapak©-Verpackung soll ein Flüssigkeitsvolumen von 480 cm^3 haben.
Wie groß ist die Oberfläche der tetraederförmigen Verpackung ?

Raumgeometrie - gerade Pyramide (Tetraeder)

4.0 Gegeben ist das Tetraeder ABCD mit der Kantenlänge 10cm.
Auf der Kante [BD] befindet sich der Punkt P, auf der Kante [CD] der Punkt Q.
Weiterhin gilt PQ II BC. Die Länge der Strecke [PB] wird mit x bezeichnet.

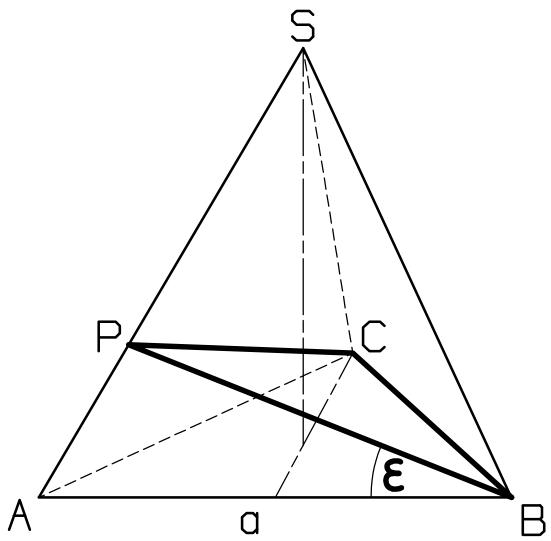
4.1 Zeichne ein Schrägbild des Tetraeders mit $\omega = 60°$, $q = 0{,}5$ und AB als Rißachse.

4.2 Berechne die Länge der Strecke [AP] in Abhängigkeit von x.

4.3 Berechne die Länge der Strecke [PQ] in Abhängigkeit von x.

4.4 Berechne den Winkel PAQ für x = 4cm.

5.0 Gegeben ist ein Tetraeder mit der Kantenlänge a. Das Tetraeder wird von einer Ebene geschnitten, die die Kante [BC] enthält (siehe Zeichnung).



5.1 Berechne den Umfang der Schnittfigur in Abhängigkeit von der Kantenlänge a und dem Maß des Winkels ε. $\left(\varepsilon = \sphericalangle PBA;\ P \in [AS]\right)$

(Ergebnis: $u = a + \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sin\varepsilon + \sqrt{3}\cdot\cos\varepsilon}$)

5.2 Ermittle den minimalen Umfang u.

Raumgeometrie - gerade Pyramide (Tetraeder)

6.0 Gegeben ist ein Tetraeder ABCD mit der Kantenlänge a = 8 cm.
Die Dreiecke ABP_n mit $P_n \in [CD]$ schließen mit der Grundfläche ABC Neigungswinkel mit den Maßen ε_n ein.

6.1 Zeichne ein Schrägbild des Tetraeders und trage ein beliebiges Dreieck ABP_1 ein.
Für die Zeichnung: $\omega = 60°$, q = 0,5, AC ist Rißachse

6.2 Berechne das Maß ε_2 des Winkels, für den der zugehörige Flächeninhalt des ΔABP ein Minimum wird. Wie groß ist dieser Flächeninhalt ?

6.3 Das Dreieck ABP_3 hat den Flächeninhalt 24 cm^2. Berechne den zugehörigen Winkel ε_3 .

6.4 Bestimme den Umfang des Dreiecks ABP_4 , wenn die Länge $\overline{P_4C}$ = 3 cm.

6.5 Warum hat von allen Dreiecken ABP das Dreieck ABP_5 mit $\overline{P_5C}$ = 4 cm den kleinsten Umfang ? Für diesen Fall wird der Winkel BPA ein Maximum.
Berechne $\sphericalangle BP_5A$!

7.0 Gegeben ist ein Tetraeder mit der Grundfläche ABC und der Spitze S.

7.1 Zeichne ein Schrägbild des Tetraeder mit der Kantenlänge 9 cm, q = 0,5 und $\omega = 60°$.

7.2 Der Winkel zwischen Grundfläche und Seitenfläche sei δ. Der Winkel zwischen Grundfläche und Seitenkante sei φ. Berechne die Maße von δ und φ .

7.3 Die Dreiecke ABP_n mit $P_n \in [CS]$ schließen mit der Grundfläche ABC Neigungswinkel mit den Maßen ε_n ein. Die Kantenlänge a des Tetraeders beträgt 9 cm.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABP_1 für $\varepsilon_1 = 50°$.
Für welchen Wert von ε_2 wird der Flächeninhalt des Dreiecks ABP_2 minimal ?
Berechne ε_3 , wenn $[P_3C]$ = 5 cm ist.

Raumgeometrie - gerade Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 9 cm ist die Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalen-schnittpunkt M.
Verlängert man die Seiten [AB] und [DC] über die Endpunkte hinaus um jeweils x cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe um x cm ($0 < x < 10$), so enstehen neue vierseitige Pyramiden A'B'C'D'S' mit dem Rechteck A'B'C'D' als Grundfläche.

1.1 Zeichne ein Schrägbild der ursprünglichen Pyramide (CD = Schrägbildachse; $\omega = 45°$; $q = 0{,}5$) und zeichne eine Pyramide A'B'C'D'S' farbig ein.

1.2 Berechne das Volumen V(x) der Pyramiden A'B'C'D'S' in Abhängigkeit von x.
(Ergebnis: $V_{(x)} = -6x^2 + 33x + 270$)

1.3 Für welche Belegung von x erhält man die Pyramide mit dem größten Volumen ?

1.4 Für welche Belegung von x besitzt die Seitenfläche B'C'S' der Pyramide einen extremen Flächeninhalt ?
(Teilergebnis: $A_{(x)} = 4{,}5\sqrt{2x^2 - 11x + 120{,}25}$)

1.5 Für welchen Bereich von x ist der Flächeninhalt der Seitenfläche B'C'S' größer als 54 cm^2 ?

2.0 Gegeben ist eine gleichseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD, sowie $\overline{AB} = 8\,cm$ und h = 9 cm.

2.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$ und der Rißachse CD.

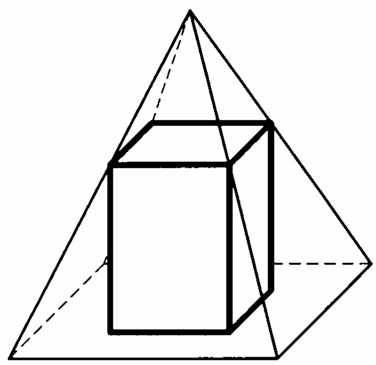
2.2 Berechne den Neigungswinkel φ der Seiten<u>**kante**</u> AS gegen die Grundfläche.

2.3 Berechne den Neigungswinkel ε der Seiten<u>**fläche**</u> BCS gegen die Grundfläche.

2.4 Berechne die Länge der Kante [AS].

2.5 Der Pyramide wird nun ein Quader mit der Höhe H = 5 cm wie in der Skizze gezeigt einbeschrieben.
Berechne das Volumen des Quaders.

<u>Hinweis:</u> Zeichne hierzu ein Schnittbild der beiden Körper ähnlich einem Axialschnitt und berechne zu-nächst die Länge einer Kante der ebenfalls quadratischen Grundfläche des Quaders.



2.6 Verkürzt man die Höhe der Pyramide um x cm und verlängert man die Kanten [AB] und [CD] über A und B bzw. über C und D hinaus um jeweils x cm, entstehen neue Pyramiden A´B´C´D´S´.
Ergänze die Zeichnung zu 2.1 entsprechend für x = 2 cm.

2.7 Berechne das Volumen V(x) der neuen Pyramiden in Abhängigkeit von x.

3.0 Gegeben ist eine 12 cm hohe gerade quadratische Pyramide ABCDS. Die Grundfläche hat die Kantenlänge 6 cm. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M.

Verlängert man die Diagonale [AC] auf beiden Seiten um $x\sqrt{2}$ cm und verkürzt gleichzeitig die Höhe [MS] um x cm, so erhält man neue Pyramiden A'BC'DS' mit Rauten als Grundfläche.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS und der Pyramide A'BC'DS' für x = 3 cm; $\omega = 45°$, q = 0,5; AC sei Schrägbildachse.

3.2 Berechne das Volumen $V_{(x)}$ der Pyramiden A'BC'DS' in Abhängigkeit von x.

[Ergebnis: $V_{(x)} = (-4x^2 + 36x + 144)\ \text{cm}^3$]

3.3 Bestimme den Extremwert, den das Volumen annehmen kann und den zugehörigen x-Wert.

3.4 Für welche Werte von x beträgt das Pyramidenvolumen 200 cm^3 ?

3.5 Berechne die Länge der Seitenkante $\overline{A'S'}$ in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $\overline{A'S'}_{(x)} = \sqrt{3x^2 - 12x + 162}$ cm

3.6 Zeige rechnerisch, daß es kein x gibt, so daß die Seitenlänge $\overline{A'S'}$ den Wert 10 cm annimmt.

4.0 Das Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge 12 cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats ABCD mit $\overline{MS}$ = 12 cm.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichnung: q = 0,5; $\omega = 45°$

4.2 Berechne das Maß α des Winkels CAS sowie die Kantenlänge $\overline{AS}$.

4.3 Wenn man die Diagonale [AC] der Grundfläche ABCD von A und von C aus um jeweils x cm verkürzt, so entstehen neue Pyramiden A_nBC_nDS.
Zeichne die Pyramide A_1BC_1DS für x = 2 in das Schrägbild ein.

Berechne das Maß ε des Winkels A_1SB und die Oberfläche O der Pyramide A_1BC_1DS.

4.4 Der Punkt T_1 liegt auf der Seitenkante $[A_1S]$ mit $\overline{AA_1}$ = 2; es gilt: $\overline{A_1T_1}$ = 4,5 cm.
Berechne Die Streckenlänge $\overline{T_1C_1}$.

4.5 In der Pyramide A_2BC_2DS hat der Winkel $A_2SC_2 = \varphi$ das Maß 38°.
Berechne den zugehörigen Wert für x.

5.0 Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 6 cm. Je zwei gegenüberliegende Seitenkanten schließen einen Winkel vom Maß φ ein.

5.1 Bestimme das Volumen V in Abhängigkeit von φ.

$$\left(\text{Ergebnis}: V(\varphi) = \frac{36\sqrt{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}}\text{cm}^3 \qquad \text{oder} \qquad V(\varphi) = \frac{36\sqrt{2}\left(1+\cos\varphi\right)}{\sin\varphi}\text{cm}^3\right)$$

5.2 Tabellarisiere V(φ) mit $\Delta\varphi = 30°$ in einem sinnvoll gewählten Intervall von φ und zeichne den Graphen.

5.3 Bestimme den Inhalt O der Oberfläche in Abhängigkeit von φ.

$$\left(\text{Ergebnis}: \; O(\varphi) = 36\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{\tan^2\frac{\varphi}{2}}}\right)\text{cm}^2 \qquad \text{oder} \qquad O(\varphi) = 36\cdot\left(1+\sqrt{\frac{4}{1-\cos\varphi}-1}\right)\text{cm}^2\right)$$

5.4 Zeichne den Graphen von O(φ) (Bedingungen wie in Aufgabe 5.2).

6.0 Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a = 4 cm. Die Seitenflächen haben das Basiswinkelmaß ε.

6.1 Stelle den Oberflächeninhalt O in Abhängigkeit von ε dar.

6.2 Tabellarisiere O(ε) in einem sinnvoll gewählten Intervall mit $\Delta\varepsilon = 10°$ und zeichne den Graphen von O(ε).

6.3 Berechne das Volumen in Abhängigkeit von ε.

7.0 Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Seitenkantenlänge s = 12 cm. Eine Seitenkante schließt mit der Grundfläche einen Winkel mit dem Maß α ein.

7.1 Berechne die Höhe h und die Grundkantenlänge a der Pyramide in Abhängigkeit von α.

7.2 Berechne das Volumen V der Pyramide in Abhängigkeit von α.

(Ergebnis: $V(\alpha) = 1152(\sin\alpha - \sin^3\alpha)\text{cm}^3$)

7.3 Tabellarisiere V(α) in]0°; 90°[mit $\Delta\alpha = 10°$.

7.4 Bestimme graphisch den Extremwert des Volumens. Gib das zugehörige α_0 an.

Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalen $\overline{AC} = e$ und $\overline{BD} = f$ ist die Grundfläche einer schiefen Pyramide ABCDS. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche. Es gilt: $e = 10\,cm$; $f = 8\,cm$; $\overline{DS} = h = 6\,cm$.
Verlängert man die Diagonale [AC] über A und C hinaus jeweils um x cm und verkürzt [DS] von S aus um x cm, so erhält man neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$.

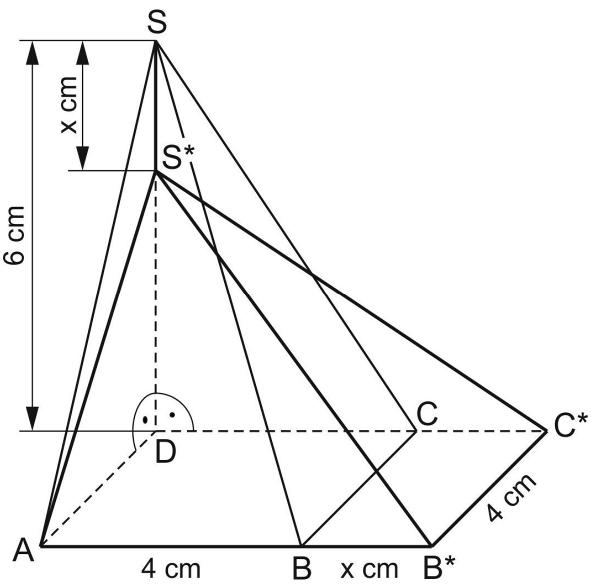
1.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit AC als Schrägbildachse, sowie $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$. Zeichne ferner die für $x_1 = 2$ neu entstandene Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

1.2 Stelle das Volumen der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

1.3 Ermittle den Extremwert für das Volumen und gib an, um welche Art von Extremwert es sich handelt.

1.4 Für welche Werte von x wird der Flächeninhalt des Schnittdreiecks BDS_n der Pyramiden kleiner als $14\,cm^2$?

2.0 Gegeben ist eine Pyramide mit der quadratischen Grundfläche ABCD. Die Seiten des Quadrates sind 4 cm, die Höhe [DS] ist 6 cm lang. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche.
Man erhält neue Pyramiden AB*C*DS* mit rechteckiger Grundfläche, wenn man die Seiten [AB] und [DC] um x cm verlängert und gleichzeitig die Höhe [DS] um x cm kürzt.



2.1 Ermittle das Volumen V(x) der Pyramiden AB*C*DS* in Abhängigkeit von x.

2.2 Für welchen x-Wert erhält man eine Pyramide mit $20\,cm^3$ Volumen?

2.3 Ermittle rechnerisch die Zahl für x, damit die Pyramide mit dem kleinsten Volumen entsteht. Gib dieses Volumen an.

Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

3.0 Im Drachenviereck ABCD hat die Symmetrieachse [AC] die Länge 10 cm und die Diagonale [BD] die Länge 6 cm. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt M mit $\overline{AM} = 3\,\text{cm}$. Das Drachenviereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, bei der die Spitze S senkrecht über M mit $\overline{MS} = 6\,\text{cm}$ liegt.

3.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Dabei soll [AC] auf der Schrägbild-achse liegen.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$

3.2 Aus der Pyramide ABCDS entstehen neue Pyramiden ABC_nDS_n dadurch, dass [AC]
von C aus um x cm verkürzt und zugleich die Höhe [MS] über S hinaus um x cm verlängert wird. Dabei gilt $0 < x < 7;\ x \in \mathbb{R}$
Zeichne die Pyramide ABC_1DS_1 für $x = 2\,\text{cm}$ in das Schrägbild ein.

3.3 Stelle das Volumen V(x) der Pyramiden ABC_nDS_n in Abhängigkeit von x dar.

3.4 Unter allen Pyramiden ABC_nDS_n hat die Pyramide ABC_oDS_o das größte Volumen V_{max}. Berechne V_{max} und das Maß γ des Winkels BS_oD.

3.5 In der Pyramide ABC_2DS_2 schließt die Seitenkante $[C_2S_2]$ mit der Grundfläche den Winkel S_2C_2M mit dem Maß 78° ein.
Berechne die Länge der Strecke $[MC_2]$.

4.0 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis [AB] und der Höhe $h_\Delta = [MC]$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über M liegt (M ist Mittelpunkt von [AB]). $\overline{AB} = 14\,\text{cm}$; $\overline{MC} = 10\,\text{cm}$; $\overline{MS} = h_P = 12\,\text{cm}$

4.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide.
$q = 0{,}5;\ \omega = 45°$; [MC] liegt auf der Schrägbildachse.

4.2 Berechne das Maß des Winkels $MCS = \varphi$ sowie die Länge der Seitenkante [CS].

4.3 Berechne Volumen und Oberfläche der Pyramide ABCS.

4.4 Verlängert man [MC] über C hinaus um x cm und verkürzt die Höhe [MS] von S aus um x cm, so entstehen neue Pyramiden ABC_nS_n; dabei gilt $0 < x < 12;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeichne die Pyramide ABC_1S_1 für $x = 3\,\text{cm}$ in das Schrägbild ein.

4.5 Gib eine Gleichung für das Volumen V(x) der Pyramiden ABC_nS_n in Abhängigkeit von x an.

4.6 Bestimme den x-Wert für den die zugehörige Pyramide ABC_nS_n das größte Volumen V_{max} besitzt und gib V_{max} an.
Berechne für diese Belegung von x das Maß des Winkels $MC_2S_2 = \varphi_2$.

4.7 Ermittle den x-Wert für den das Volumen der zugehörigen Pyramide ABC_3S_3 gleich der Hälfte des Volumens der Pyramide ABCS ist.

Raumgeometrie – schiefe Pyramide

Funktionale Abhängigkeiten

5.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 10\,\text{cm}$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über D liegt und $\overline{DS} = 12\,\text{cm}$ ist.

5.1 Erstelle ein Schrägbild der Pyramide ABCDS im Maßstab 1:2 (oder wahlweise 1:1) $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$ **;** [CD] liegt auf der Schrägbildachse.

5.2 Berechne die Länge der Pyramidenkante [BS] sowie das Maß des Winkels $DBS = \varphi$.

5.3 Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS.

5.4 Man erhält neue Pyramiden $A_nBC_nDS_n$, wenn man sowohl [CD] über C hinaus als auch [AB] über A hinaus um jeweils x cm verlängert und [DS] von S aus um 0,5 x cm verkürzt; dabei gilt $0 < x < 24$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeichne für $x = 3\,\text{cm}$ die zugehörige Pyramide $A_1BC_1DS_1$ in das Schrägbild ein.

5.5 Stelle das Volumen V(x) der Pyramiden $A_nBC_nDS_n$ in Abhängigkeit von x dar.

5.6 Für welche Belegung von x hat die zugehörige Pyramide $A_0BC_0DS_0$ das größte Volumen? Gib dieses größte Volumen V_{max} an.

5.7 Für welchen Wert von x hat die Pyramide $A_2BC_2DS_2$ das gleiche Volumen wie die Pyramide ABCDS?

6.0 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Basis [BC] des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AM} = 8\,\text{cm}$. Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über M mit $\overline{MS} = 10\,\text{cm}$ liegt.

6.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS. [AM] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$
Berechne das Maß φ des Winkels MAS.

6.2 Punkte P_n auf der Seitenkante [AS] der Pyramide sind Eckpunkte von Dreiecken BCP_n.
Zeichne das Dreieck BCP_1 für $\overline{AP_1} = 4\,\text{cm}$ in das Schrägbild unter 6.1 ein.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCP_1.

6.3 Es gibt ein Dreieck BCP_2, so dass $\sphericalangle P_2MA = 65°$ gilt.
Berechne das Maß ε des Winkels BP_2C.

6.4 **D**ie Basis [BC] des Dreiecks ABC wird über B und C hinaus jeweils um x cm verlängert, gleichzeitig wird die Pyramidenhöhe [MS] von S aus um 0,5 x cm verkürzt. Es entstehen neue Pyramiden $AB_nC_nS_n$.
Zeichne die Pyramide $AB_1C_1S_1$ für $x = 3\,\text{cm}$ in das Schrägbild zu 6.1 oder in ein neues Schrägbild ein.
Zeige durch Rechnung, dass für das Volumen V(x) der Pyramiden $AB_nC_nS_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = -\frac{4}{3}\left(x^2 - 15x - 100\right)\text{cm}^3$.

6.5 Berechne das Volumen V_2 der Pyramide $AB_2C_2S_2$, bei der der Winkel $B_2S_2C_2$ das Maß 120° besitzt.

Ergebnisse auf 2 Stellen nach dem Komma runden!

Raumgeometrie - Zylinder

1. Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 7:4. Wird es mit der kleineren Seite als Achse gedreht, entsteht ein Zylinder mit dem Oberflächeninhalt $O = 616\ \pi\ cm^2$.

Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

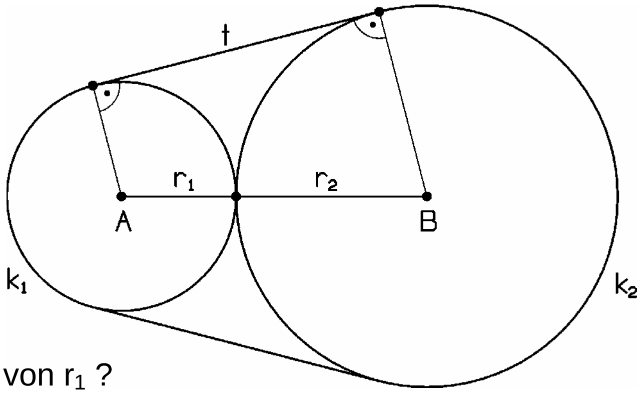
2. Wird ein Rechteck mit einem Umfang von 38 cm um eine seiner Seiten gedreht, entsteht ein Zylinder mit dem Mantelflächeninhalt $168\ \pi\ cm^2$.

Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

3. Wird ein gerader Zylinder durch seine Mittelachse geschnitten entsteht als Schnittfläche ein Rechteck.
Die Diagonale dieses Rechtecks ist 10 cm lang, und die Zylinderhöhe ist 5 cm größer als der Zylinderradius.

Berechne Oberfläche und Volumen des Zylinders.

4. Gegeben ist der Abstand $\overline{AB} = 8$ cm zweier Zylinder, k_1 und k_2 mit den Radien r_1 und r_2 ($r_1 \leq r_2$). Beide Zylinder berühren sich.
Die beiden Kreise werden durch ihre gemeinsamen Tangenten mit der Länge t verbunden.



a) Welchen Umfang haben beide Zylinder zusammen in Abhängigkeit von r_1 ?

b) Stelle eine Gleichung für die Länge der Tangenten t in Abhängigkeit von r_1 auf.

c) Welchen Wert muss r_1 annehmen, damit $t = r_2$?

5. Ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen x und y kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gerollt werden (um die Längsseite rollen, um die Querseite rollen).

Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden (gedachten) Körper ?

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

1. Ein Meßzylinder aus Glas hat einen Innendurchmesser von 4,0 cm.

a) In den Meßzylinder wird Wasser eingefüllt.
Welchen Abstand haben zwei Markierungen auf der Zylinderwand, die einem Volumenzuwachs von 50 cm^3 entsprechen ?

b) Ein Eisenstück in der Form eines geraden Kreiskegels mit dem Radius 1,8 cm wird vollständig in das eingefüllte Wasser getaucht. Der Wasserspiegel steigt dabei um 2,4 cm.
Wie groß ist die Höhe des Kegels ?

2. Es soll ein zylindrisches Gefäß hergestellt werden, das 500 cm^3 faßt und dessen innere Tiefe doppelt so groß wie der Innendurchmesser ist.
Wie tief ist das Gefäß innen ? Welche Außenmaße hat es, wenn der Boden 3,0 mm und die Wand 2,0 mm dick sind ?

3. Ein gerader Kreiszylinder hat das Volumen 5,0 cm^3 und die Mantelfläche 4,0 cm^2.
Berechne die Oberfläche und die Höhe des Zylinders.

4. a) Ein Zylinder mit der Grundfläche A_G = 50 000 mm^2 hat das Volumen 45 l.
Wie hoch ist er ?

b) Welchen Durchmesser hat ein Zylinder mit V = 100 l und der Höhe h = 40 cm ?

5. In einer zylinderförmigen Regentonne steht das Wasser 60 cm hoch. Nachdem 120 l entnommen wurden, steht es noch 20 cm hoch.
Welchen lichten Durchmesser hat die Tonne ?

6. Welche Masse hat das laufende Meter eines Kupferrohrs (Dichte 8,9 g/cm^3) mit dem äußeren Durchmesser 4 cm und der Wandstärke 3 mm ?

7. Ein Rechteck mit den Seiten x und y rotiert um x und erzeugt so einen Zylinder.
Berechne Volumen und Oberfläche des entstehenden Zylinders in Abhängigkeit von x für $y : x = \sqrt{2}$.

8. Durch einen Würfel wird ein zylindrisches Loch parallel zu einer Kante gebohrt.
Wie verhalten sich Kantenlänge a und Lochdurchmesser d, wenn der Würfel dann nur noch halb so schwer ist ?

9. Ein Würfel hat dieselbe Oberfläche wie ein Zylinder. Der Durchmesser des Zylinders ist gleich seiner Höhe. Welcher Körper hat das größere Volumen ?
Um wieviel Prozent ist sein Volumen größer ?

10. Die Diagonale des Achsschnitts eines Zylinders ist 18 cm lang.
Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Zylinders, wenn zusätzlich gilt:

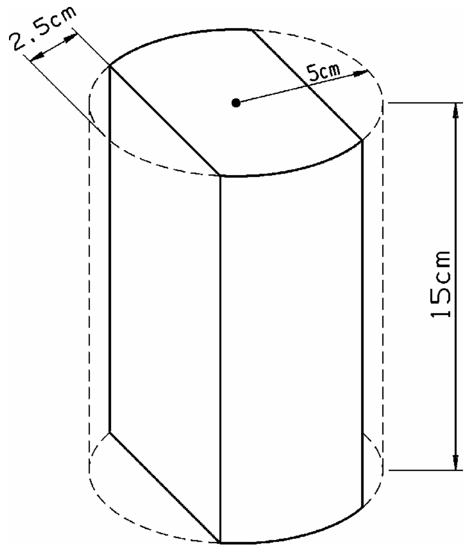
a) der Zylinderdurchmesser ist 6 cm

b) die Zylinderhöhe ist um 6 cm größer als der Zylinderdurchmesser.

11. Von einem Eisenzylinder (r = 5 cm, h = 15 cm, Dichte 7,9 g/cm^3) werden von der Rundung auf beiden Seiten 2,5 cm weggefräst (im Bild gestrichelt).

a) Welches Volumen und welche Masse hat der Restkörper ?

b) Welche Oberfläche hat der Restkörper ?



12. Der Axialschnitt eines geraden Kreiskegels ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a.
Berechne Volumen und Oberfläche des Kegels in Abhängigkeit von a.

13. Ein kegelförmiger Behälter mit dem oberen Durchmesser d = 8 cm und der inneren Höhe h = 10 cm wird mit Wasser gefüllt. Der Abstand der Flüssigkeit bis zum Rand beträgt 3 cm.
Wieviel Wasser befindet sich im Behälter ?

14. Ein oben offener Meßbecher aus Glas hat die Form eines geraden Kreiskegels.
Er faßt 1l und hat die innere Höhe 20 cm.

a) Berechne den Grundkreisradius r des Kegels.

b) Durch einen Strich auf der Mantellinie des Kegels wird das Volumen 400 cm^3 markiert.
Wie weit ist dieser Strich von der Kegelspitze entfernt (entlang der Mantellinie gemessen) ?

15. Ein gerader Kegel mit r = 4 cm und der Höhe h = 9 cm wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche durchgeschnitten.

Berechne Volumen und Oberfläche des Kegelstumpfes.

16. Ein kegelförmiger Meßbecher (Innendurchmesser d = 15 cm; Mantellinie s = 20 cm) wird mit Mehl gefüllt.

a) Wieviel Gramm Mehl faßt der bis zum Rand gefüllte Meßbecher, wenn die Dichte von Mehl 0,6 g/cm^3 beträgt ?

b) Wieviel Gramm Mehl sind im Meßbecher, wenn er nur bis zu 2/3 seiner Höhe gefüllt ist ?

17. Ein gerader Kegel mit dem Radius r = 3 cm und der Höhe h = 8 cm wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene so geteilt, daß die beiden entstehenden Körper

a) gleiche Volumina,

b) gleiche Mantelflächen besitzen.

In welchem Abstand zur Grundfläche erfolgt der Schnitt ?
Berechne den Inhalt der Schnittfläche.

Hinweis: Bestimme den Abstand und die Schnittfläche zunächst allgemein (ohne Zahlenwerte - nur formelmäßig).

18. Bei einem geraden Kreiskegel ist eine Mantellinie so groß wie der Durchmesser.
Wie verhalten sich Volumen und Oberfläche in Abhängigkeit von der Länge der Mantellinie ?

19. Bei einem geraden Kreiskegel ist die Mantelfläche doppelt so groß wie die Grundfläche.
Wie hoch ist er, wenn das Volumen 100 ist ?

20. Eine Kreissektorfläche mit dem Mittelpunktswinkel 135° und dem Radius 8 cm wird zu einem Kegel zusammengebogen.
Wie groß ist das Kegelvolumen ?

21. Ein gerader Kegel hat den Grundkreisradius 5 cm und eine Oberfläche von $225 \cdot \pi$ cm^2.

a) Welche Höhe hat der Kegel ?

b) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel α des in die Ebene abgewickelten Mantels ?

22. Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist viermal so groß wie der Kegelgrundkreis.
Wie groß ist der Mittelpunktswinkel α des in eine Ebene abgerollten Mantels ?

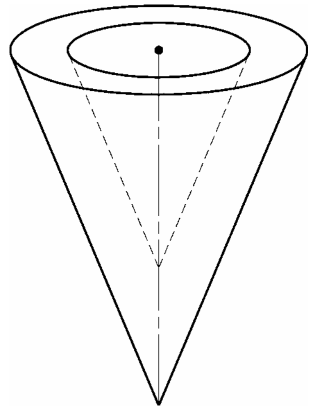
23. Ein gerader Kreiskegel hat die Höhe h = 8 cm. Die Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene ergibt einen Halbkreis.
Berechne Oberflächeninhalt und Volumen des Kegels.

24. Einem geraden Kegel mit dem Radius r = 2 cm und der Höhe h = 6 cm wird ein gerader Zylinder so einbeschrieben, daß die Grundfläche des Zylinders mit der des Kegels zusammenfallen und die Zylinderhöhe so groß wie der Zylinderdurchmesser ist.
Wie groß ist das Zylindervolumen ?

25. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a rotiert um eine Seite.
Welches Volumen hat der dabei entstehende Körper ?

26. Einem Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h soll ein Würfel so einbeschrieben werden, daß der Würfel auf der Grundfläche des Kegels steht.
Berechne die Kantenlänge a in Abhängigkeit von r und h.

27. Aus einem Kegel (Radius R, Kegelhöhe H) wird ein konzentrischer Kegel (r, h) mit gleichem Öffnungswinkel so ausgebohrt, daß die Spitzen H/2 voneinander entfernt sind und in die gleiche Richtung zeigen.
Welches Volumen hat der Restkörper ?



28. Ein gerader Kreiskegel (R, H) wird zylindrisch (Zylinderradius r) so durchbohrt, daß Kegel- und Zylinderachse zusammenfallen.

a) Berechne das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von R, H und r.

b) Wie groß muß r sein, damit das Volumen des Restkörpers halb so groß ist wie das des Kegels ?

29. Ein waagerecht im Wasser schwimmender zylindrischer Baumstamm mit dem Durchmesser d = 60 cm ragt 15 cm hoch aus dem Wasser.
Welche Dichte hat das Holz ?

30. a) Die Mantellinien eines geraden Kreiskegels schließen mit der Grundfläche des Kegels einen Winkel von 60° ein. Der Grundkreisradius des Kegels ist 6 cm.
Berechne Volumen und Oberfläche des Kegels.

b) Dem in a) gegebenen Kegel ist ein gerader Kreiskegel so einbeschrieben, daß seine Spitze im Kreismittelpunkt des gegebenen Kegels liegt. Die Mantellinien des einbeschriebenen Kegels schließen einen Winkel von 30° ein.
Berechne die Mantelfläche und das Volumen des einbeschriebenen Kegels.

31. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r = 8 cm und der Höhe h = 8 cm. Auf dem Mantel dieses Kegels liegen die Punkte A und B. Der Punkt A ist 9 cm und der Punkt B ist 5 cm von der Kegelspitze entfernt. Die beiden Mantellinien auf denen A und B liegen haben den Öffnungswinkel 90°.
Wie lang ist der kürzeste Weg auf dem Kegelmantel von A nach B ?

Ergebnisse ohne Lösungsweg

Nr.	
1a	$h = 3{,}9788\ ...\ cm \approx 4{,}0\ cm$
1b	$h_k = 8{,}8888\ ...\ cm \approx 8{,}9\ cm$
2	$r = 3{,}4139\ ...\ cm \approx 3{,}41\ cm$; Innere Tiefe $h \approx 13{,}66\ cm$; Außendurchmesser $D \approx 7{,}23\ cm$; Äußere Höhe $H \approx 13{,}96\ cm$
3	$O \approx 43{,}27\ cm^2$; $h \approx 0{,}25\ cm$
4a	$h = 9\ dm$
4b	$d \approx 5{,}64\ dm$
5	$d \approx 6{,}18\ dm$
6	$m = 3103{,}5...\ g \approx 3{,}1\ kg$
7	$V = 2\pi x^3$; $O = x^2\pi\left(4 + \sqrt{8}\right)$
8	$a : d = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$
9	$a = r\sqrt{\pi}$; $\frac{V_{Zylinder}}{V_{Würfel}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$
10a	$O = 376{,}43\ cm^2$; $V = 479{,}82\ cm^3$
10b	$O = 589{,}28\ cm^2$; $V = 1056{,}9\ cm^3$
11	$V = 717{,}3\ cm^3$; $m = 5{,}67\ kg$; $O = 512{,}52\ cm^2$
12	$V = \frac{1}{24}\pi\sqrt{3} \cdot a^3 \approx 0{,}23\,a$; $O = \frac{3}{4}\pi\, a^2 \approx 2{,}36\, a$
13	$V \approx 57{,}47\ cm^3$
14	$r \approx 6{,}91\ cm$; $x \approx 15{,}6\ cm$
15	$V = 42\cdot\pi\ cm^3 \approx 131{,}95\ cm^3$; $O \approx 155{,}65\ cm^2$
16a	$m \approx 655{,}3\ g$
16b	$m \approx 194{,}2\ g$
17	$x = h\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \approx 1{,}65\ cm$; $A = r^2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 17{,}8\ cm^2$
18	$V : O = s\sqrt{3} : 18$
19	$h = \sqrt[3]{\frac{900}{\pi}}$
20	$V \approx 69{,}9\ cm^3$
21	$h \approx 39{,}69\ cm$; $\alpha = 45°$
22	$\alpha = 90°$
23	$V = \frac{1}{9}\pi h^3 \approx 178{,}72\, cm^3$; $O = \pi h^2 \approx 201{,}06\, cm^2$
24	$V_Z \approx 10{,}86\ cm^3$

Ergebnisse ohne Lösungsweg

Nr.	
25	$V = 0{,}25 \cdot \pi \cdot a^3 \approx 0{,}79 \cdot a^3\ cm^3$
26	$a = \dfrac{r\,h}{r + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot h}$
27	$V_{Rest} = \dfrac{7}{24}\pi R^2 H$
28a	$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 - 3r^2 + \frac{2r^3}{R}\right)$
28b	$r = \dfrac{R}{2}$
29	$\rho \approx 0{,}80\ g / cm^3$
30	$V \approx 392{,}1\ cm^3$; $O \approx 339{,}3\ cm^2$
31	$V \approx 26{,}8\ cm^3$; $M \approx 43{,}9\ cm^2$

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

1.0 Rechtecke mit dem Umfang u = 24 cm und den Seitenlängen a und b rotieren um die Rechteckbreite b.

1.1 Stelle die Mantelfläche der entstehenden Zylinder als Funktion der Rechtecklänge a dar.

[Ergebnis: $M_{(a)} = (-\,2a^2\pi + 24a\pi)\text{cm}^2$]

1.2 Welcher Wert von a liefert die maximale Mantelfläche (Extremwert) ?

2.1 Eine zylindrische Blechdose soll ein Volumen von 194,779 cm^3 erhalten.

2.2 Stelle die Oberfläche der Dose als Funktion des Zylinderradius r dar.

[Ergebnis: $O_{(r)} = 2\,\pi\,(r^2 + \frac{62}{r})\ \text{cm}^2$]

2.3 Ermittle den minimalen Bedarf an Blech (O_{min}) mittels einer Wertetabelle und geeigneten Iterationsschritten auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet.
Technisch sinnvolle Werte für den Zylinderradius: $1\text{ cm} \leq r \leq 7\text{ cm}$

3.0 Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 5$ cm und der Höhe $h_c = 10$ cm.

3.1 Dem Dreieck werden Rechtecke DEFG einbeschrieben mit D, E $\in$ [AB]; F $\in$ [BC] und G $\in$ [AC]. Es gilt: $\overline{DE} = y$ cm; $\overline{EF} = x$ cm.
Zeichne das Dreieck ABC und das einbeschriebene Rechteck für y = 2.

3.2 Stelle die Länge der Strecke [DE] in Abhängigkeit von der Maßzahl x dar.

(Ergebnis: $y = 5 - \frac{x}{2}$)

3.3 Bestimme rechnerisch die Größe von x so, daß das einbeschriebene Rechteck ein Quadrat wird.

3.4 Das Dreieck und die einbeschriebenen Rechtecke rotieren um die Achse [MC], wobei M der Mittelpunkt der Seite [AB] ist.
Bestimme die Mantelfläche der entstehenden Zylinder in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $M_{(x)} = \frac{\pi}{2}\left(10x - x^2\right)$)

3.5 Gibt es unter den entstehenden Zylindern solche, die die Mantelfläche $M = \frac{5}{2}\pi$ besitzen ? (Rechnerische Bestimmung)

3.6 Der Mantel des entstehenden Drehkegels aus 2.4 wird abgewickelt.
Bestimme rechnerisch das Maß des Mittelpunktswinkels φ der Abwicklung.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

4.0 Ein gerader Kreiskegel hat den Grundkreisradius r = 5 cm und die Höhe h = 12 cm. Diesem Kegel werden Zylinder einbeschrieben. Die einbeschriebenen Zylinder stehen auf der Grundfläche des Kegels und berühren den Kegelmantel. Die Höhe der einbeschriebenen Zylinder ist x cm, der Radius des Grundkreises beträgt y cm.

4.1 Der Kegel mit dem einbeschriebenen Zylinder wird längs der Kegelachse geschnitten. Zeichne die Schnittfigur.

4.2 Stelle die Mantelfläche der einbeschriebenen Zylinder in Abhängigkeit von x dar
(Ergebnis: $M_{(x)} = \frac{5}{6}\pi\left(-x^2 + 12x\right)$)

4.3 Es gibt einbeschriebene Zylinder mit der Mantelfläche $\frac{45}{2}\pi$ cm^2.
Ermittle rechnerisch die zugehörige Belegung für x.

4.4 Der Mantel des Kegels aus 1.0 wird abgewickelt. Bestimme das Maß des Mittelpunktswinkels φ der Abwicklung.

5.0 Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung y = - 1,25x + 8.
Sie schneidet die x-Achse im Punkt P und die y-Achse im Punkt Q. Der Punkt A sei der Koordinatenursprung.

5.1 Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem, und berechne das Maß des Winkels APQ.
Für die Zeichnung: $-1 \leq x \leq 7$; $-1 \leq y \leq 8$; 1 LE = 1cm

5.2 Der Punkt C wandert auf der Geraden g von Q nach P und legt Rechtecke $AB_nC_nD_n$ mit $B_n \in$ x-Achse fest. Zeichne ein beliebiges Rechteck ABCD in das Koordinatensystem ein.

5.3 Die Rechtecke $AB_nC_nD_n$ rotieren um die y-Achse. Stelle die Mantelfläche der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n dar.
(Ergebnis: $A(x) = \pi\,(-2{,}5\,x^2 + 16\,x)$ FE)

5.4 Aus dem Dreieck APQ werden die Rechtecke $AB_nC_nD_n$ herausgeschnitten.
Die verbleibenden Restflächen rotieren ebenfalls um die y-Achse. Stelle den Rauminhalt der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte C_n dar.
(Ergebnis: $V(x) = \pi\,(1{,}25\,x^3 - 8\,x^2 + 109{,}23)$ VE)

5.5 Tabellarisiere V(x) im Intervall [0; 6] mit $\Delta x = 1$ (1 Kommastelle), und stelle die Abhängigkeit graphisch dar.
Für die Zeichnung: 1 LE = 1cm; 1 LE auf der x-Achse = 1 cm
1 LE auf der V-Achse = 50 VE

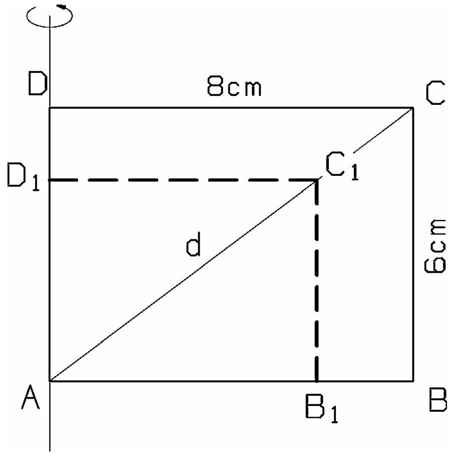
5.6 Zeichne auf der x-Achse des Graphen zu 2.5 den Bereich ein, für den V(x) kleiner als 250 VE ist.

5.7 Berechne den Inhalt der Oberfläche des Rotationskörpers von 2.4 für den Punkt C_1 mit x = 2,5.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

6.0 Ein Rechteck ABCD mit den Seiten [AB] = 8 cm und [BC] = 6 cm rotiert um AD als Achse. Verkürzt man die Diagonale [AC] von C aus um a cm, so entstehen neue Rechtecke $AB_nC_nD_n$ und somit auch neue Zylinder (0 < a < 10).



6.1 Stelle eine Gleichung auf für die Mantelfläche in Abhängigkeit von a.

6.2 Stelle eine Gleichung auf für das Volumen in Abhängigkeit von a.

7.0 Ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen [AB] = 4 cm und [BC] = 12 cm rotiert um die längere der beiden Seiten. Es entsteht als Rotationskörper ein Zylinder.

7.1 Berechne das Volumen V und die Mantelfläche M des Zylinders.

7.2 Man erhält neue Zylinder, wenn man den Grundkreisradius [AB] um x cm verlängert und die Höhe [BC] um x cm verkürzt.

7.3 Stelle die Mantelfläche $M_{(x)}$ der Zylinder in Abhängigkeit von x dar.

7.4 Ermittle rechnerisch die Belegung von x, für die man den Zylinder mit der größten Mantelfläche M_{max} erhält.

7.5 Zeige, daß für das Volumen $V_{(x)}$ der Zylinder in Abhängigkeit von x gilt:
$V_{(x)} = \pi \cdot (-x^3 + 4x^2 + 80x + 192)\ cm^3$

7.6 Tabellarisiere $V_{(x)}$ für $x \in [0; 12]$ mit $\Delta x = 1$.
Stelle $V_{(x)}$ in Abhängigkeit von x grafisch dar.

7.7 Entnimm aus dem Graphen die x-Werte, für die die zugehörigen Zylinder das größte bzw. kleinste Volumen haben.

8.0 Die Grundfläche eines geraden Kegels ist ein Kreis mit dem Durchmesser d = 10 cm.

8.1 Stelle die Höhe h in Abhängigkeit von Maß γ des Öffnungswinkels dar.

8.2 Zeichne den Graphen von $h(\gamma)$ in einem sinnvoll gewählten Intervall für γ ($\Delta\gamma = 20°$).

8.3 Stelle den Inhalt O der Oberfläche in Abhängigkeit von γ dar.

8.4 Zeichne den Graphen von $O(\gamma)$.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel

Funktionale Abhängigkeiten

9.0 Eine Menge von geraden Kreiskegeln ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Kegel gleichlange Mantellinien (Länge s) haben, die aber von Kegel zu Kegel verschieden große Neigungswinkel (Maß α) mit der Grundfläche einschließen.

9.1 Stelle Volumen V und Mantelflächeninhalt M der Kegel in Abhängigkeit von s und α dar.

$$\left(\text{Ergebnis: } V(s;\alpha) = \frac{\pi}{3}s^3 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha;\ \ M(s;\alpha) = s^2\pi \cdot \cos\alpha\right)$$

9.2 Begründe algebraisch, dass es für $0° < \alpha < 90°$ keine Kegel mit extremem Mantelflächeninhalt gibt.

9.3 Tabellarisiere $V(\alpha)$ für s = 6 cm im Intervall $0° \le \alpha \le 90°$ in Schritten von $\Delta\alpha = 10°$, zeichne den Graphen von $V(\alpha)$ und bestimme graphisch den extremen Wert des Volumens.

10.0 Ein Dreieck ABC hat die Seitenlängen a = 3 cm und b = 5 cm. Das Dreieck wird um die Achse AB gedreht.

10.1 Berechne den Oberflächeninhalt O in Abhängigkeit von β.

(Ergebnis: $O(\beta) = 24\pi \sin\beta \ \ \text{cm}^2$)

10.2 Tabellarisiere $O(\beta)$ mit $\Delta\beta = 20°$ und zeichne den Graphen.

10.3 Bestimme den Wert β_0, für den $O(\beta)$ maximal wird. Gib diesen maximalen Wert an.

11.0 Die parallelen Seiten eines Trapezes ABCD sind [AB] und [CD]. Ferner gilt: $\alpha = 90°$, $\beta \in]0°;\ 90°[$. Das Trapez rotiert um die Seite [AB] als Achse.

11.1 Stelle das Volumen V des Drehkörpers in Abhängigkeit von $c = \overline{CD}$, $d = \overline{AD}$ und β dar.

$$\left(\text{Ergebnis: } V(c;d;\beta) = \pi d^2\left(c + \frac{d}{3\tan\beta}\right)\right)$$

11.2 Tabellarisiere $V(c;d;\beta)$ für c = 8 cm und d = 6 cm in Schritten von $\Delta\beta = 10$.
Stelle $V(\beta)$ graphisch dar.

12.0 Für Trapeze ABCD mit den parallelen Grundlinien [AB] und [CD] gilt $\overline{AB} = 12{,}8\ \text{cm}$, $\overline{AD} = 6\ \text{cm}$, $\beta = \gamma = 90°$.

12.1 Berechne den Flächeninhalt der Trapeze in Abhängigkeit von $\alpha = \sphericalangle BAD$.

(Ergebnis: $A(\alpha) = (76{,}8 \cdot \sin\alpha - 9 \cdot \sin2\alpha)\text{cm}^2$)

12.2 Tabellarisiere $A(\alpha)$ für $\alpha \in [0°;\ 180°[$ mit $\Delta\alpha = 15°$, und zeichne ein Diagramm.
Für die Zeichnung: α-Achse: 1 cm entspricht 10°
A-Achse: 1 cm entspricht 10 cm^2

12.3 Die Trapeze rotieren um die Achse AB. Berechne das Volumen der Rotationskörper in Abhängigkeit von α.

Raumgeometrie - Zylinder, Prisma

1. Einem 12 cm hohen Zylinder mit einer Oberfläche von 216 π cm^2 wird ein reguläres (regelmäßiges) 6-seitiges Prisma einbeschrieben.

Wie groß ist die Oberfläche des Prisma ?

2. Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge a.

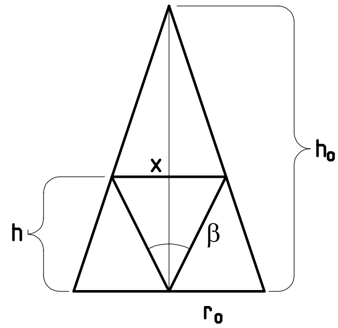
In welchem Verhältnis steht das Volumen des einbeschriebenen Zylinders zum umbeschriebenen Zylinder ?

3. Das Viereck ABCD ist Grundfläche eines 12 cm hohen geraden Vierkantprismas.
Gegeben sind: $\overline{AC} = 7cm$, $\beta = \delta = 90°$, $\sphericalangle ACB = 32°$, $\sphericalangle DCA = 25°$.
Die Eckpunkte der Deckfläche EFGH sind so angeordnet, daß E über A, F über B, G über C und H über D liegen.

Berechne das Volumen des Prismas und den Flächeninhalt des Rechtecks DBFH.
Berechne die Mantelfläche des Zylinders das dem Prisma umbeschrieben ist.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel, Kugel

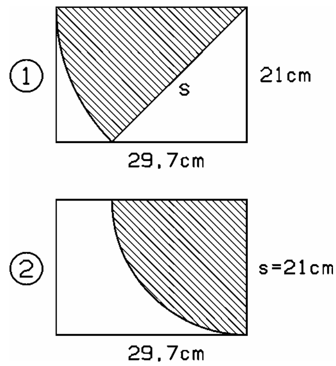
1. Einem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r_0 = 3 cm und der Höhe h_0 = 9 cm werden auf der Spitze stehende gerade Kreiskegel einbeschrieben. Die Spitzen aller einbeschriebenen Kegel fallen mit dem Höhenfußpunkt des ursprünglichen Kegels zusammen. Der Öffnungswinkel eines einbeschriebenen Kegels hat das Maß β, der Grundkreisradius mißt x cm und die Höhe h cm. Stelle h, x und das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von β dar.



2.0 Aus einem DIN A4-Blatt Papier kann die Mantelfläche (Abwicklung) eines Kreiskegels auf zweierlei Arten herausgeschnitten werden (siehe Zeichnung). Größe eines A4-Blattes: 29,7 cm x 21 cm.

2.1 In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Kegel ?

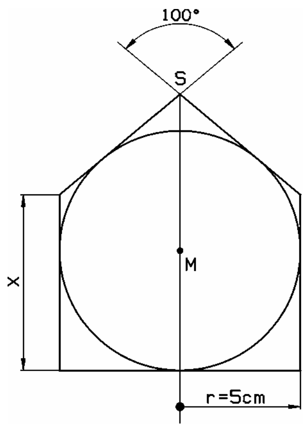
2.2 In welchem Verhältnis steht jeweils der Papierabfall zur Mantelfläche ?



3. Die nebenstehende Zeichnung zeigt den Axialschnitt eines Zylinders mit aufgesetztem Kegel.
In diesen Zylinder- Kegel ist eine Kugel so einbeschrieben, dass diese den Zylinder und den Kegel berührt.

Gegeben sind der Zylinder-, Kegel-, Kugelradius r = 5 cm und der Öffnungswinkel γ = 100° des Kegels.

Berechne das Zylindervolumen und das Kegelvolumen.



4.0 Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r = 4 cm und dem Kegelvolumen $V_{Kegel} = 53\frac{1}{3}\pi\ cm^3$.

Dem Kegel sind gerade Kreiszylinder einbeschrieben (Radius = x cm, Höhe = y cm), wobei die Grundflächen der Zylinder mit der Grundfläche des Kegel zusammenfallen und die Zylinder den Kegelmantel umlaufend berühren. Auf jedem Zylinder sitzt noch eine Kugel, die sowohl die Zylinder- Deckfläche als auch den Kegelmantel berührt.

4.1 Zeichne einen Axialschnitt der Figur Kegel- Zylinder- Kugel mit x = 2,5 cm für den einbeschriebenen Zylinder.

4.2 Berechne den Neigungswinkel φ der Kegel- Mantel- Linien zur Grundfläche.

4.3 Gib eine Gleichung an für die Mantelflächen der Zylinder in Abhängigkeit von x.

4.4 Stelle die Gleichung für die Oberfläche der Kugeln in Abhängigkeit von x auf.

4.5 Bestimme x so, dass das Volumen von Zylinder und Kugel gleich sind.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel, Kugel

Am Ende der Aufgabensammlung finden Sie eine Formelübersicht

1.0 Ein gerader Kreiskegel hat den Grundkreisradius r = 3 cm und die Höhe h = 12 cm.

1.1 Zeichne einen Axialschnitt des Kegels im Maßstab 1:2.

1.2 Berechne das Volumen, die Mantel- und die Oberfläche des Kegels.

1.3 Welche Höhe h muss ein gerader Kreiszylinder mit gleicher Grundfläche haben, wenn sein Volumen gleich dem des Kegels ist?

1.4 Berechne die Oberfläche dieses Zylinders.

2.0 Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h = 9 cm und dem Grundkreisradius r = 3 cm sollen gerade Zylinder einbeschreiben werden.
Zylindergrundfläche und Kegelgrundfläche liegen konzentrisch aufeinander.
Der Zylinderradius sei r_z.

2.1 Zeichne einen Axialschnitt von Kegel und Zylinder für r_z = 2 cm.

2.2 Bestimme die Oberfläche und das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von r_z.

2.3 Untersuche, ob die Oberfläche des Zylinders einen extremen Wert annimmt.
Gib den Extremwert und den entsprechenden Wert für r_z an.

3. Das Dreieck ABC mit A(0/2); B(6/0); C(2/8) rotiert um die y-Achse.
Berechne das Volumen und die Oberfläche des entstandenen Rotationskörpers.

4.0 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{BC}$ = 10 cm und ∢ BAC = 90°.
Es rotiert um AC als Achse, wodurch ein Kegel mit der Spitze C entsteht.
Neue Kegel erhält man, wenn man die Höhe von der Spitze her um x cm verkürzt und die Grundfläche beibehält.

4.1 Zeichne den Axialschnitt des ursprünglichen Kegels zusammen mit dem des Kegels für x = 3 cm.

4.2 Für welchen Wert von x erhält man einen Kegel, dessen Mantellinien mit der Grundfläche Neigungswinkel von 45° einschließen?

4.3 Als Abwicklung des Kegelmantels erhält man einen Kreissektor. Für welches x entsteht ein Halbkreis?

5.0 Einem geraden Kreiskegel mit der Höhe h = 10 cm und dem Grundkreisradius r = 4 cm soll eine Kugel einbeschrieben werden.

5.1 Zeichne den Axialschnitt von Kegel und Kugel.

5.2 Berechne das Volumen von Kegel und Kugel.

Raumgeometrie - Zylinder, Kegel, Kugel

6.0 Ein gerader Kreiskegel hat den Grundkreisradius r_k = 2,5 cm, seine Mantellinien s_k sind 6,5 cm lang.

6.1 Zeichne den Axialschnitt des Kegels, und berechne die Kegelhöhe h_k.

6.2 Berechne das Maß φ des Öffnungswinkels (an der Spitze) des Kegels.

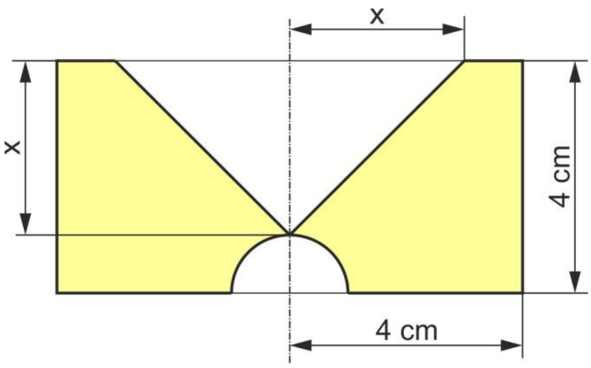
6.3 Berechne das Maß ω des Mittelpunktwinkels der Kegelmantelabwicklung.

6.4 Dem Kegel werden gerade Kreiszylinder mit dem Radius x cm und der Höhe y cm einbeschrieben, deren Grundflächen in der Grundfläche des Kegels liegen und deren Deckflächen vom Kegelmantel begrenzt werden.
Zeichne den Axialschnitt des Zylinders für x = 1,5 cm in die Zeichnung ein.

6.5 Bestimme y in Abhängigkeit von x.

6.6 Für welchen Wert von x erhält man den einbeschriebenen Zylinder mit der größten Mantelfläche? Wie groß ist dieser?

7.0 Die Figur rotiert um die Symmetrieachse. Die Spitze des Dreiecks berührt den Halbkreis.
Kegelradius und Kegelhöhe des Rotationskörpers sind variabel, haben aber stets das gleiche Maß x.



7.1 Berechne die fünf Teilflächen, die die Oberfläche des Rotationskörpers bilden, in Abhängigkeit von x.

7.2 Welches Intervall ist für x zulässig?

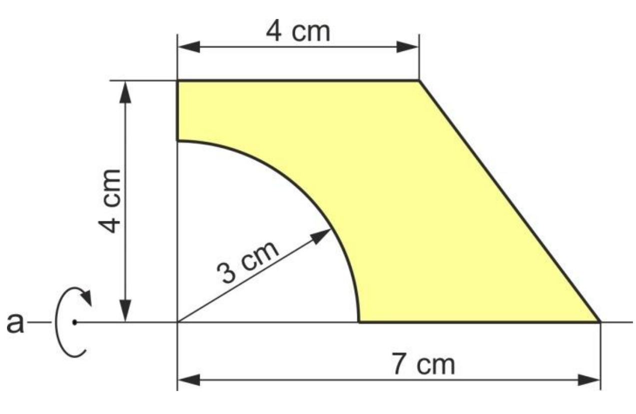
7.3 Gib die Oberfläche des Rotationskörpers als Funktion von x an.

7.4 Welche Art von Extremwert der Oberfläche tritt im Intervall von 7.2 auf? Begründung!

7.5 Berechne die Belegung von x des Extremwertes und gib diesen Extremwert an.

8.0 Gegeben ist nebenstehend abgebildete Figur.

8.1 Die Fläche rotiert um die Achse a.
Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers.



Raumgeometrie - Zylinder, Kegel, Kugel

9.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC, mit der Basis $[AB] = 5\text{ cm}$ und der Höhe $\overline{MC} = 6\text{ cm}$. (M = Mittelpunkt von [AB])

9.1 Zeichne das Dreieck ABC.
Berechne das Maß α der Basiswinkel des Dreiecks ABC.

9.2 Das Dreieck ABC rotiert um MC als Achse.
Berechne die Oberfläche des entstehenden Kegels.

9.3 Aus dem gegebenen Kegel entstehen neue Kegel, wenn man den Radius [AM] um x cm verlängert und die Mantellinien [AC] um 0,5 x cm verkürzt.
Ergänze die Zeichnung mit dem Axialschnitt des Kegels, den man für x = 2 erhält.

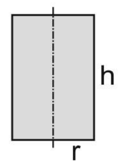
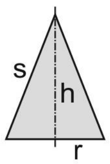
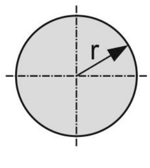
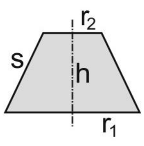
9.4 Stelle die Höhe h(x) der Kegel in Abhängigkeit von x dar.
Berechne den Wert von x, für den man einen Kegel mit der Höhe 4 cm erhält.

9.5 Gib das Intervall für x an, für das man Kegel erhält.

9.6 Stelle die Mantelfläche M(x) der Kegel in Abhängigkeit von x dar.

9.7 Berechne den Wert für x, so dass die Mantellinien des zugehörigen Kegels mit der Grundfläche einen Winkel von 30° einschließen.

Verwendete Formeln

Körper	Axialschnitt	Volumen	Oberfläche	Mantel
Zylinder		$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	$O = 2\pi \cdot r(r + h)$	$M = 2\pi \cdot r \cdot h$
Kegel		$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$	$O = \pi \cdot r(r + s)$	$M = \pi \cdot r \cdot s$
Kugel		$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$	$O = 4\pi \cdot r^2$	
Kegel-stumpf		$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h\left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$	$O = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \pi \cdot s\left(r_1 + r_2\right)$	$M = \pi \cdot s\left(r_1 + r_2\right)$

Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten

1.0 Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{AB} = c = 8\text{ cm}$ und $\overline{BC} = a = 6\text{ cm}$ wird um AB als Achse gedreht. Es soll das Volumen des Drehkörpers und der Inhalt der Oberfläche in Abhängigkeit von β bestimmt werden.

1.1 Zeichne die Graphen zu $V(\beta)$ und $O(\beta)$ nach Erstellen einer Wertetabelle ($\Delta\beta = 30°$).

1.2 Die Oberfläche hat für $\beta_0 \in [90°; 180°[$ ihren größten Inhalt.
Berechne in diesem Bereich $O(\beta)$ in Schritten von $\Delta\beta = 10°$ und zeichne den Graphen möglichst genau. Ermittle aus der Zeichnung β_0 und $O(\beta_0)$.

2.0 Gleichschenklige Dreiecke ABC mit 6 cm langen Schenkeln [AC] und [BC] und dem Winkel γ an der Spitze ($\gamma_0 \in]0°; 180°[$) rotieren um die Achse AB.

2.1 Zeichne für $\gamma = 30°$ den Axialschnitt des Rotationskörpers.

2.2 Stelle das Volumen $V\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von $\frac{\gamma}{2}$ dar.

2.3 Rotieren die Dreiecke ABC um eine zu [AB] parallele Achse s, die durch die Spitze C verläuft, so erhält man Rotationskörper im doppeltem Volumen. Weise dies durch Rechnung nach.

3.0 Rauten ABCD mit $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ rotieren um eine zu [BD] parallele Achse s, die durch den Eckpunkt A verläuft. Der Winkel BAD hat das Maß α.

3.1 Zeichne für $\alpha = 60°$ den Axialschnitt durch den Rotationskörper im Maßstab 1:2.

3.2 Ermittle das Volumen der Rotationskörper in Abhängigkeit von α bzw. $\frac{\alpha}{2}$.

4.0 Gegeben ist ein Kreiskegel mit dem Achsenschnitt ABS und dem Grundkreismittelpunkt M. $\overline{SM} = \overline{BM} = 4\text{ cm}$. Ein Punkt P bewegt sich auf der Mantellinie [SB] von B nach S. Das Maß des Winkels $\sphericalangle BMP_n$ ist α_n.

4.1 Berechne $\overline{P_1M}$ für $\alpha_1 = 30°$.

4.2 P_2 sei der Punkt, für den $\overline{PM}$ minimal wird. Bestimme $\overline{P_2M}$ und α_2.

4.3 Berechne α_3 so, dass ΔMBP_3 gleichschenklig wird. Berechne auch die Seitenlängen des Dreiecks MBP_3 (zwei Möglichkeiten).

Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten

5.0 Das Dreieck ABS ist das Axialschnittdreieck eines geraden Kreiskegels. Der Mittelpunkt des Grundkreises ist M. Es gilt $\overline{SM} = 8\text{ cm}$, $\overline{AM} = \overline{MB} = 4\text{ cm}$.

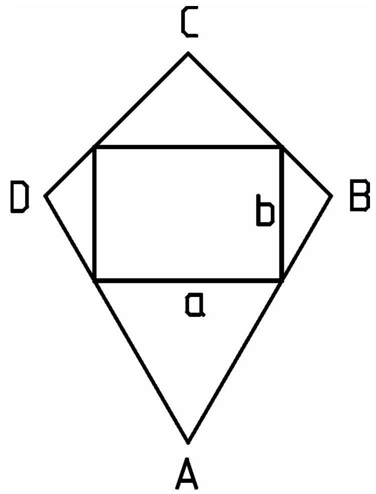
5.1 Ein Punkt P bewegt sich auf der Mantellinie [SB] von B nach S. Das Maß des Winkels BMP ist α. Zeige, dass $\overline{PM}$ in Abhängigkeit von α wie folgt dargestellt werden kann:
$\overline{PM} = \dfrac{8\text{ cm}}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$ und $\overline{PM} = \dfrac{\sqrt{12{,}8}\text{ cm}}{\sin\left(\alpha + 63{,}4°\right)}$.

5.2 Begründe algebraisch und geometrisch, dass $\overline{PM}$ für $\alpha_0 = 26{,}6°$ am kürzesten ist.

5.3 Wenn $t = \sin\alpha + 2\cos\alpha$ mit $t > 0$ den größten Wert annimmt, ist $\overline{PM}$ am kleinsten. Zeige, dass man $t = \sin\alpha + 2\cos\alpha$ durch quadratische Ergänzung auf die Form $\left(\sin\alpha - \dfrac{t}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{25}t^2$ bringen kann. Berechne daraus t_{max} und damit $\overline{PM}_{min}$ sowie aus $\sin\alpha_0 = \dfrac{t_{max}}{5}$ dann α_0.

Raumgeometrie

Zylinder, Kegel, Kugel - funktionale Abhängigkeiten



6.0 Ein Drachen ABCD ist festgelegt durch: A(0/0), B(3/6), C(0/9).

6.1 Dem Drachen werden Rechtecke einbeschrieben (siehe Skizze). Stelle die Länge a als Funktion der Breite b dar.

(Zwischenergebnis: $a = 6 - \frac{2}{3}b$ cm).

6.2 Stelle die Flächeninhalte der Rechtecke als Funktion von b dar.

[Zwischenergebnis: $A_{(b)} = (-\frac{2}{3}b^2 + 6b)$ cm^2]

6.3 Wie lauten Definitions- und Wertemenge der Funktion $A = -\frac{2}{3}b^2 + 6b$?

6.4 Zeichne den Graphen der Funktion aus 6.2 in ein Koordinatensystem ein.

6.5 Entnehme dem Graphen das Intervall für b, in dem die Flächeninhalte kleiner als 11 cm^2 werden.

6.6 Berechne nun die Intervallgrenzen von 6.5 auf zwei Nachkommastellen.

6.7 Der Drachen mit den einbeschriebenen Rechtecken rotiert um die Symmetrieachse. Es entsteht ein Doppelkegel mit einbeschriebenen Zylindern.

6.8 Berechne das Volumen des Doppelkegels.

6.9 Stelle die Volumina der Zylinder als Funktion von b dar.

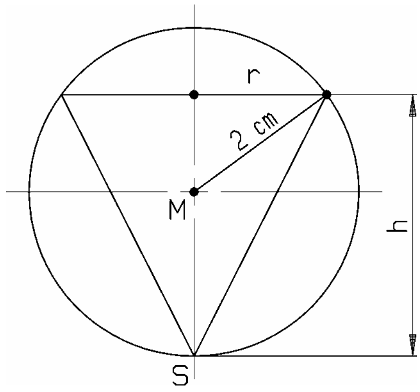
(Zwischenergebnis: $V_{(b)} = \frac{\pi}{9}\left(b^3 - 18b^2 + 81b\right) cm^3$)

6.10 Tabellarisiere die Funktion aus 6.9 für $b \in [0; 9]$ und $\Delta b = 1$ und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem (V-Achse: 10 cm^3 = 1LE)

6.11 Entnimm dem Graphen die Belegung von b, die den Zylinder mit maximalem Volumen liefert.

Raumgeometrie - Kegel, Kugel

1.0 Gegeben ist eine Kugel mit Radius 2 cm. In diese Kugel sind gerade Kreiskegel mit Radius r einbeschrieben (Kegelschar); die Kegelachse liegt auf der Kugelachse und die Kegelhöhe h ist variabel.
Die nebenstehende Zeichnung zeigt einen Axialschnitt.



1.1 Berechne Volumen und Oberfläche der Kugel.

1.2 Stelle eine Gleichung auf für den Kegelradius r in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $r_{(h)} = \sqrt{h(4-h)}$ cm)

1.3 Stelle eine Gleichung auf für die Mantelfläche $M_{(h)}$ der Kegel in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $M_{(h)} = 2\,\pi\,h\,\sqrt{4-h}$ cm^2)

1.4 Stelle eine Gleichung auf für das Volumen $V_{(h)}$ der Kegel in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h.

(Ergebnis: $V_{(h)} = \frac{1}{3}\,\pi\,h^2(4-h)\,cm^3$)

1.5 Erstelle jeweils eine Wertetabelle für die Funktionen aus 1.2, 1.3 und 1.4 in Schritten von $\Delta h = 0{,}5$ für $h \in [0; 4]$.
Zeichne die zugehörigen Graphen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.
Abszissenachse (x-Achse) ist h, Ordinatenachse (y-Achse) ist $r_{(h)}$, $M_{(h)}$ bzw. $V_{(h)}$.
Für die Zeichnung: x-Achse: 1LE = 2 cm;
y-Achse: 1LE = 2cm, bzw. 1 FE = 0,5 cm, bzw. 1 VE = 1 cm
(LE = Längeneinheit, FE = Flächeneinheit, VE = Volumeneinheit)

1.6 Berechne das Kegelvolumen und die Kegelmantelfläche für den Fall, daß der Axialschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck ist.

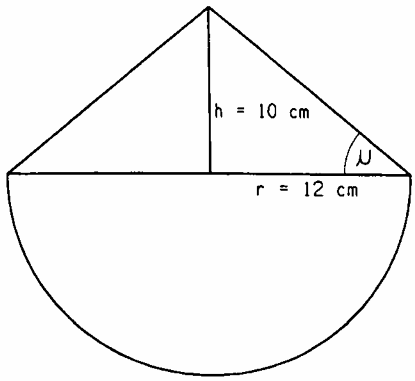
1.7 Berechne das Kegelvolumen und die Kegelmantelfläche für den Fall, daß der Axialschnitt des Kegels ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist (der rechte Winkel befindet sich bei der Kegelspitze S).

1.8 Wird der Kegelmantel in die Ebene abgewickelt so entsteht ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel φ.
Stelle eine Gleichung für φ in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h auf.

1.9 Von einem bestimmten Kegel aus der Schar wird dessen Mantel in die Ebene abgewickelt. Der Kreissektor des Kegelmantels hat den Mittelpunktswinkel $\varphi = 270°$.
Berechne für diesen Kegel sein Volumen und seine Oberfläche.

1.10 Für den Kegel aus Pkt. 1.6 ist die Mantelabwicklung ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel φ_1. Berechne φ_1.

2.0 Gegeben ist eine Halbkugel, der ein gerader Kreiskegel aufgesetzt ist (siehe nebenstehende Skizze).
Verkürzt man den Radius um x cm und verlängert man gleichzeitig die Höhe des Kegels um 10x cm, so entstehen neue Körper.



2.1 Berechne das Volumen der Körper in Abhängigkeit von x.

(Ergebnis: $V_{(x)} = \frac{1}{3}\pi\left(8x^3 - 158x^2 + 336x + 4896\right)cm^3$)

2.2 Tabellarisiere V(x) für $x \in [\,0;\ 12\,[$ mit $\Delta x = 1$.

2.3 Zeichne ein Diagramm und entnimm der Zeichnung den Extremwert.

Maßstab: 1 LE entspricht 1 cm für den x - Wert;
1 LE entspricht 500 cm^3 für den V(x) - Wert

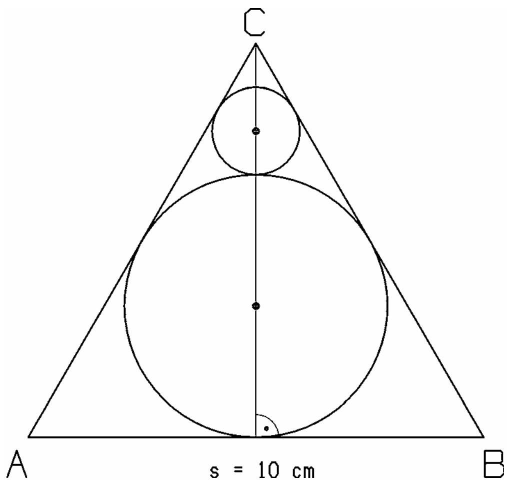
2.4 Berechne das Maß des Winkels μ für den ursprünglichen Körper.
Berechne ferner dasjenige x, damit μ = 60° wird.

3. Ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s = 10 cm ist Schnittdreieck eines geraden Kreiskegels. Der Kegelschnitt erfolgte durch die Mittelachse des Kegels.

In diesem Kegel sind zwei Kugeln einbeschrieben entsprechend nebenstehender Skizze.
In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Kugeln ?
($V_1 : V_2$)

V_1 = Volumen der kleinen Kugel

V_2 = Volumen der großen Kugel



Wenn auf die zweite Kugel noch eine dritte, auf die dritte Kugel noch eine vierte usw. gesetzt wird, wie groß ist das Gesamtvolumen aller unendlich vielen Kugeln für die Seitenlänge s ?

4. Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge AB = 10 cm und der Dreieckshöhe h = 6 cm ist ein Halbkreis einbeschrieben. Rotiert diese Figur um die Mittelachse, so entsteht als Rotationskörper ein Kreiskegel mit einbeschriebener Halbkugel.

Berechne das Volumen der Halbkugel.

Berechne das Volumen des Restkörpers, den man erhält, wenn man die Halbkugel dem Kegel entnimmt.

5. Das gleichschenklige Dreieck ABC ($\overline{AB}$ ist Basis) mit der Höhe h = 8 cm und $\overline{AB}$ = 12 cm rotiert um die Höhe h. Als Rotationskörper entsteht ein Kreiskegel.

a) Zeichne einen Axialschnitt des Kreiskegels und berechne die Länge der Mantellinie s, das Volumen und die Mantelfläche des Kegels.

b) Dem Kegel wird eine Kugel einbeschrieben (Die Kugel berührt die Mantelfläche und die Grundfläche des Kegels).

Zeichne den Kreis der Kugel in den Axialschnitt ein.

Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.

Gymnasium / Realschule

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

Am Ende der Aufgabensammlung finden Sie eine Formelübersicht

Vollkugel, Hohlkugel

1. Berechne den Radius einer Kugel, deren Oberfläche $10\ m^2$ groß ist.

2. Berechne den Radius einer Kugel, deren Rauminhalt $V = 1\,dm^3$ groß ist.

3. Kugeln zum Kugelstoßen der Schüler haben die Masse 4 kg.
Welchen Durchmesser müssen diese Kugeln haben ?
(Dichte von Eisen: $r = 7{,}85\ g/cm^3$)

4. Welche Oberfläche hat eine Kugel mit dem Rauminhalt $V = 100\ cm^3$?

5. Aus einem tropfenden Wasserhahn fällt alle 3 Sekunden ein kugelförmiger Wassertropfen von ungefähr 4 mm Durchmesser.
Wieviel Liter Wasser gehen durch den undichten Verschluß innerhalb von 24 Stunden verloren ?

6. Die Durchmesser der Erde und des Mondes stehen im Verhältnis von (gerundet) 11 : 3.
Wie verhalten sich ihre Oberflächen- und Rauminhalte ?

7. Welche mittlere Dichte hat ein Ball von 12 cm Umfang und 38 g Masse ?

8. Berechne die mittlere Dichte der Erde (mittlerer Durchmesser: 12.740 km, Masse $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg)

9. Die Schülerin Lisa behauptet, daß sie eine Kugel ($r = 10\ cm$) aus purem Gold leicht tragen könnte. Stimmt die Behauptung ?
(Dichte von Gold: $r = 19{,}3\ kg/dm^3$)

10. Eine Holzkugel der Dichte $r = 0{,}65\ kg/dm^3$ hat einen Durchmesser von 12 cm.
Bestimme den Radius einer Kugel aus Gold (Dichte $r = 19{,}3\ kg/dm^3$) mit der gleichen Masse.

11. Ein kugelförmiger Glaskolben (Innendurchmesser 20 cm) ist vollständig mit Wasser gefüllt. Das Wasser wird in einen Meßzylinder (Innendurchmesser 8 cm) umgefüllt.
Wie hoch steht das Wasser im Meßzylinder ?

12. Das Gebäude eines Kraftwerks besteht aus einem 22 m hohen Zylinder mit 18 m Durchmesser und einer oben aufgesetzten halbkugelförmigen Kuppel.
Berechne den umbauten Raum in m^3.

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

13. Eine Kugel soll das gleiche Volumen erhalten wie ein Kegel mit dem Grundkreisdurchmesser d = 16 cm und der Kegelhöhe h = 62 cm.
Bestimme den Kugelradius.

14. a) Um wie viel Prozent würde sich die Oberfläche einer Kugel verringern, wenn man den Radius der Kugel um 20% verkleinert ?

b) Um wie viel Prozent würde die Oberfläche einer Kugel zunehmen, man den Radius der Kugel um 20% vergrößert ?

15. Um wieviel Prozent würde das Volumen einer Kugel abnehmen, wenn der Radius um 25% verkleinert würde ?

16. Ein zylindrischer Kochtopf (lichte Weite 32 cm, lichte Höhe 16 cm) ist zu 60% mit Wasser gefüllt. Es werden 5 kugelförmige Knödel ins Wasser gelegt (Radius 6cm), die ganz untertauchen.
Wie hoch steht dann das Wasser im Topf , oder wie viel Wasser läuft heraus ?

17. 1 Million Kugeln verdrängen in einem zylinderförmigen Behälter $4\ \text{dm}^3$ Flüssigkeit.
Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel ?

18. In einen Meßzylinder (Innendurchmesser 45 mm) mit Millimeterskala wird $150\ \text{cm}^3$ Reinigungsbenzin gegeben. Zum Reinigen werden dann 100 Kugellagerkugeln mit einem Durchmesser von 4 mm in das Reinigungsmittel gelegt.
Um wie viele Skaleneinheiten steigt das Reinigungsbenzin an ?

19. 666 kleine Schrotkugeln mit einem Durchmesser von 2,8 mm werden zu einer einzigen Bleikugel verschmolzen ohne daß es dabei zu Verlusten kommt.
Welchen Radius hat die große Bleikugel ?

20. Wie viele Kugellagerkugeln mit dem Durchmesser d = 4 mm kann man aus 10 kg Stahl (Dichte $r = 7{,}85\ \text{kg}/\text{dm}^3$) herstellen, wenn der Materialverlust bei der Herstellung 12% beträgt ?

21. Gegeben ist eine Kugel mit Durchmesser 20 mm. Wie viele Kugeln mit Durchmesser 3 mm haben zusammen genommen

a) die gleiche Oberfläche wie die gegebene Kugel ?

b) den gleichen Rauminhalt wie die gegebene Kugel ?

22. Wie viele Kugeln lassen sich durch Umschmelzen aus einer Wachskugel von 10 cm Radius herstellen, wenn ihr Radius der sechste Teil des ursprünglichen Radius ist ?

Gymnasium / Realschule

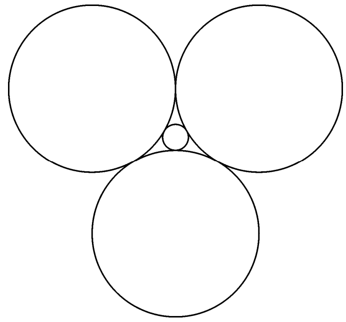
Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

23. Die Mittelpunkte von drei gleich große Kugeln (Radius r) bilden ein gleichseitiges Dreieck und berühren sich gegenseitig. In dem Loch in der Mitte soll eine vierte Kugel so Platz finden, daß ihr Volumen ein Maximum wird.

Wie groß darf das Volumen der vierten Kugel höchstens sein ?



24. Die Flüssigkeit eines Reagenzglases (Innendurchmesser 1,4 cm) wird in einen zylindrischen Messzylinder (Innendurchmesser 2,6 cm) umgefüllt.
Wie hoch steht die Flüssigkeit im Meßzylinder (in cm angeben) ?
Das Reaganzglas ist ein Zylinder mit angeformter Halbkugel. Die Flüssigkeitshöhe im Reagenzglas ist 4 cm.

25. Die Maße einer Hohlkugel aus Stahl sind:
Außendurchmesser: 480 mm, Innendurchmesser: 44 cm. Berechne:

a) Die Wanddicke der Hohlkugel. Die Wanddicke ist als gleichmäßig anzunehmen.

b) Das Volumen des Kugelmaterials

c) Die gesamte Oberfläche der Hohlkugel

26. Ein Gasbehälter hat die Form einer Kugel mit dem Außendurchmesser 18 m und der Blechdicke 18 mm.

a) Wie viel Gas (in m^3) kann der Behälter aufnehmen, wenn er nur zu 90% gefüllt werden darf ?

b) Das Innere der Kugel wurde mit einem Dichtungsmaterial beschichtet. Welche Fläche mußte beschichtet werden ?

c) Berechne die Masse der Hohlkugel ($r = 7{,}85\ kg/dm^3$).

27. Von einer Holzkugel mit dem Radius r = 12 cm wird eine Schicht der Dicke 2 mm abgedreht.
Um wie viel Prozent verringern sich dadurch

a) das Kugelvolumen ?

b) die Kugeloberfläche ?

28. Die Kugel einer Kirchturmspitze hat einen Radius von 22 mm. Sie soll mit 12 g einer Goldlegierung ($r = 16{,}8\ kg/dm^3$) vergoldet werden.
Wie dick (in mm) ist die Goldschicht ?

29. Ein kugelförmiger Tropfen Seifenlauge vom Rauminhalt 2,8 mm^3 wird zu einer Seifenblase mit dem Außendurchmesser 12 mm aufgeblasen.
Berechne die Wanddicke der Seifenblase.

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

30. Eine Hohlkugel aus Kupfer ($r = 8{,}9\ \mathrm{g/cm^3}$) und dem Außenradius $r = 4{,}5\ \mathrm{cm}$ hat die Masse m = 5,2 g. Bestimme die Wanddicke (in mm).

31. Ein Sportball von 94 cm Umfang hat eine 0,6 cm dicke Kunststoffhülle der Dichte $r = 0{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$. Welches Gewicht hat der Ball (in kg).

32. Eine Kugel von 1,8 m Durchmesser ist mit einer 0,05 cm dicken Goldschicht versehen worden. Wie viel Kilogramm Gold waren das ($r = 19{,}1\ \mathrm{kg/dm^3}$) ?

33. Innerer und äußerer Radius einer Hohlkugel unterscheiden sich um 2 cm. Die Oberfläche beträgt $1800\ \mathrm{cm^2}$. Berechne die beiden Radien R und r.

34. Welchen Radius hat eine Kugel, deren Oberfläche das doppelte Maß hat wie ihr Rauminhalt ?

35. Die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche einer Kugel sind gleich. Berechne den Radius der Kugel.

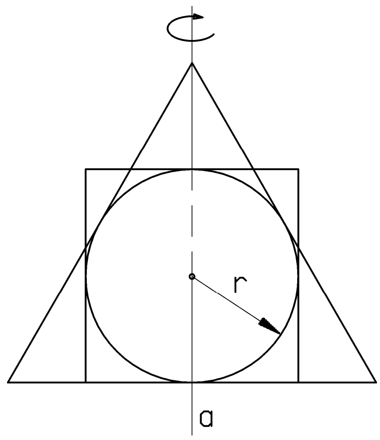
36. Die Oberfläche eines Zylinders ist so groß wie die einer Kugel vom gleichen Radius. Welcher Körper hat das kleinere Volumen ?

37. Ein Kegel und eine Kugel haben das gleiche Volumen. Der Kugelradius r und der Grundkreisradius r des Kegels sind ebenfalls gleich. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der beiden Körper ?

38. Ein Kreis ist gleichzeitig Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks und eines Quadrates (siehe Skizze rechts).

a) Die drei Flächen rotieren um die Achse a. Berechne die Rauminhalte von Zylinder, Kegel und Kugel in Abhängigkeit von r.

b) In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen der drei Körper ?

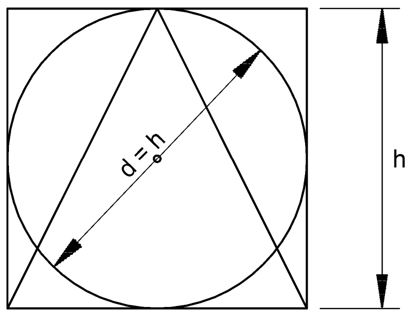


Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

39. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Axialschnitt eines Zylinders, eines Kegels und einer Kugel.



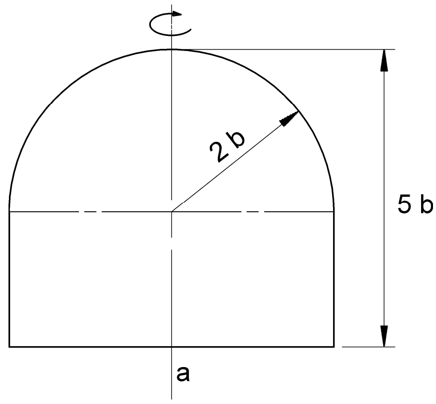
a) Um wie viel Prozent ist die Oberfläche des Zylinders größer als die Oberfläche der Kugel ?

b) Um wie viel Prozent ist die Oberfläche des Kegels kleiner als die Oberfläche der Kugel ?

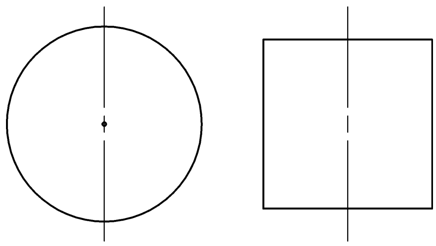
c) Um wie viel Prozent ist das Kugelvolumen größer als das Kegelvolumen ?

d) Um wie viel Prozent ist das Zylindervolumen größer als das Kugelvolumen ?

40. Berechne die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von b.



41. Ein Kreis und ein Quadrat - beide flächengleich, rotieren um ihre Mittelachsen. Man erhält eine Kugel und einen Zylinder.
In welchem Verhältnis stehen



a) die Rauminhalte $\left(V_{Zyl} : V_{Kug}\right)$

b) die Oberflächen der beiden Körper.

42. Eine Glaskugel mit 11 cm Durchmesser wird in einen kleinstmöglichen zylinderförmigen Karton verpackt.

a) Bestimme die Oberfläche des Kartons.

b) Ein Glasmacher hat die Kugel aus einem 2,8 cm dicken kugelförmigen Glastropfen angefertigt. Wie dick ist die Wand der Glaskugel ?

43. Einer Kugel mit Radius $r = 6\text{ cm}$ ist ein Würfel einbeschrieben.

a) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Würfels.

b) Um wie viel Prozent ist die Kugeloberfläche größer als die Oberfläche des Würfels ?

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

44. Einem Kegel mit dem Grundkreisradius $r = 5$ cm und der Höhe h ist eine Kugel einbeschrieben.

a) Zeichne für $h = 8$ cm einen Axialschnitt des Kegels mit Kugel.

b) Berechne den Radius r der Inkugel **in Abhängigkeit von h**.

45. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder der Höhe h = 0,8 r einbeschrieben. Berechne das Verhältnis der Rauminhalte beider Körper.

46. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben. Seine Oberfläche ist halb so groß wie die Kugeloberfläche.
Berechne den Radius und die Höhe des Zylinders **in Abhängigkeit vom Kugelradius R**.

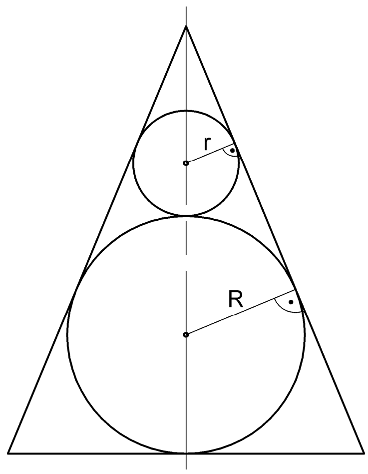
47. Einer Kugel vom Radius R ist ein gerader Kreiskegel mit dem Grundkreisradius $r = 0,5R$ einbeschrieben.
Wie groß ist das Kegelvolumen ?

48. Einem Würfel mit der Kantenlänge a ist eine Kugel einbeschrieben und eine zweite Kugel umbeschrieben.
Bestimme die Volumina der beiden Kugeln **in Abhängigkeit von a**.

49. Zwei sich berührende Kugeln (R = 12 cm und r = 3 cm) werden außen von einem Kegel umschrieben.
(Skizze nicht maßstäblich)

a) Berechne die Kegelhöhe h, den Grundkreisradius r und die Kegelmantellänge s.

b) In welchem Verhältnis stehen Mantelfläche und Grundfläche des Kegels ?



50. Vergrößert man den Radius einer Kugel um 5 cm, so hat die neue Kugel eine um 590 cm^2 größere Oberfläche.
Berechne die Radien und die Rauminhalte der beiden Kugeln.

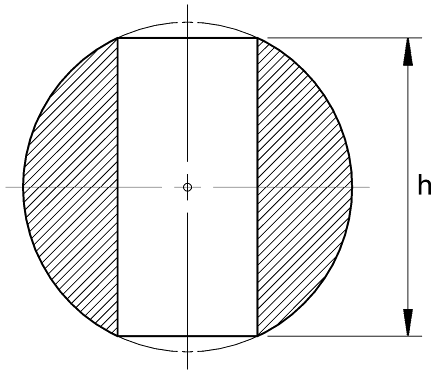
Gymnasium / Realschule

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

51. Bestimme das Volumen der zylindrisch durchbohrten Kugel **in Abhängigkeit von h**.



52. Eine Hohlkugel aus einer Metallegierung (Dichte $r = 8{,}3\,kg/dm^3$) und dem Außendurchmesser d = 18 cm sinkt bis zur Hälfte in Wasser (Dichte $r = 1{,}0\,kg/dm^3$) ein. Berechne die Wandstäke s der Hohlkugel.

53. Eine Hohlkugel mit 12 cm Außendurchmesser und 3,8 mm Wandstärke schwimmt in Wasser (Dichte $r = 1{,}0\,kg/dm^3$) und taucht genau zur Hälfte ein.

Bestimme die Dichte des Kugelmaterials.

Halbkugel, Kugelschicht, Kugelzone, Kugelsektor, Kugelhaube

54. Bei einer Halbkugel ist die Maßzahl der Oberfläche gleich der Maßzahl des Rauminhaltes.
Welchen Radius hat diese Halbkugel ?

55. Eine Kugel mit dem Radius R und eine Halbkugel mit dem Radius r haben beide das gleiche Volumen.
In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen von Kugel und Halbkugel ?

56. Eine Kugel mit $V = \frac{4}{3} \times p^4$ wird von einer Ebene im Abstand $\frac{p}{2}$ vom Kugelmittelpunkt aus geschnitten. Berechne die Größe der Schnittfläche.

57. Einer Halbkugel ist ein Zylinder umbeschrieben und ein Kegel einbeschrieben.
In welchem Verhältnis stehen die drei Rauminhalte ?

58. Der Innendurchmesser eines kugeligen Heizöltanks beträgt 2 m.

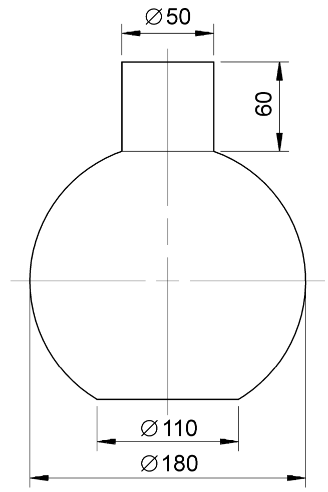
Wie viel Liter könnten noch in den Tank gefüllt werden, wenn das Öl 50 cm hoch steht ?

Raumgeometrie - Kugel

Klasse 10

- Aufgaben -

59. Berechne den Rauminhalt des Rundkolbens wenn eine Flüssigkeit randvoll eingefüllt ist ? Welche innere Fläche weist der Glasbehälter auf wenn eine Flüssigkeit bis zum oberen Rand eingefüllt ist ?



Maße in mm

60. Welche Fläche der Erdkugel kann man in einer Höhe von 2000 m überblicken ? (mittlerer Erdradius: 6.370 km)

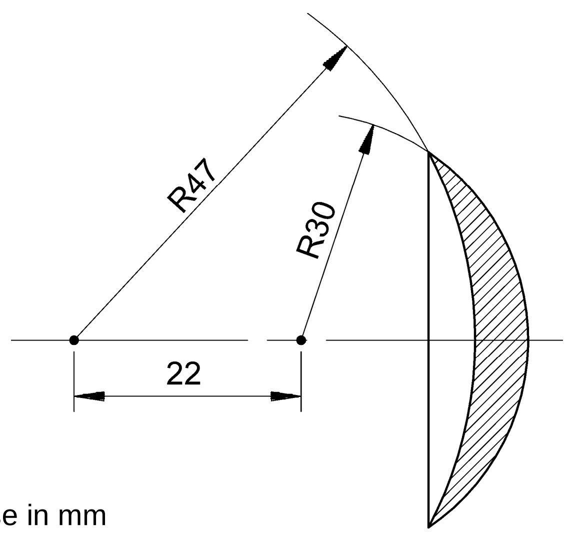
61. Der erste Kosmonaut erreichte seine größte Höhe bei 302 km über der Erdoberfläche.

a) Welche Fläche auf der Erde konnte der Kosmonaut im besten Fall überblicken ?

b) Wie viel Prozent der Erdoberfläche waren in diesem Fall zu sehen ? (mittlerer Erddurchmesser: 12.740 km)

62. Eine homogene Holzkugel (d = 12 cm) schwimmt im Wasser (Dichte $r = 1{,}0\ \text{kg}/\text{dm}^3$).
Der trockene Teil der Kugel (Kugelhaube) hat einen Durchmesser von 10 cm.
Berechne die Dichte des Holzes.

63. Die Linse einer Brille wird von zwei Kugelflächen gebildet.
Berechne das Volumen der Linse.



Maße in mm

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

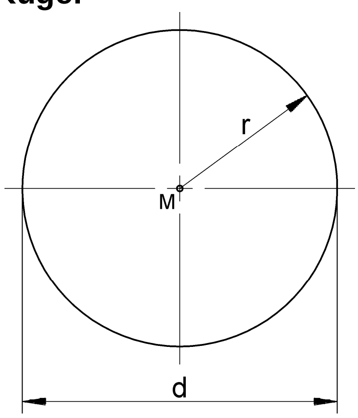
1. Definitionen

Es werden folgende Symbole verwendet:

r	Kugel-, Kegel-, Zylinderradius	M	Mittelpunkt der Kugel
d	Kugel-, Kegel-, Zylinderdurchmesser	V	Volumen (Rauminhalt) Kugel, Kugelteil, Kegel, Zylinder
r	Radius eines Schnittkreises		
h	Höhe eines Kugelabschnitts, einer(s) Kugelteil, Kugelzone, Kegels oder Zylinders	O	Oberflächeninhalt Kugel, Kegel, Zylinder
s	Länge der Kegelmantellinie	A_{Mantel}	Mantelfläche

2. Formeln

Kugel



Volumen

$$V = \frac{4}{3} p r^3$$

$$V = \frac{p}{6} d^3$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{p} O^3}$$

Oberfläche

$$O = 4 p r^2$$

$$O = d^2 p$$

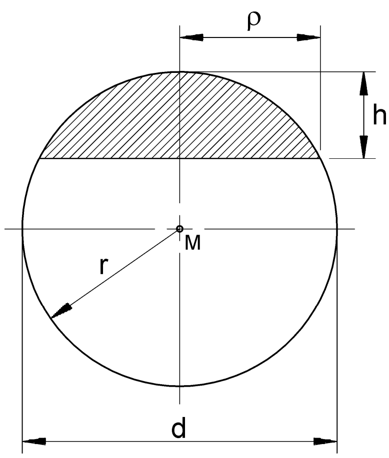
$$O = \sqrt[3]{36 p V^2}$$

Kugelradius

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p} O}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4 p} V}$$

Kugelabschnitt - Kugelsegment - Kugelkappe



Volumen

$$V = \frac{p}{6} h \left(3 r^2 + h^2\right)$$

$$V = \frac{p}{3} h^2 \left(3r - h\right)$$

$$V = \frac{p}{6} h^2 \left(3d - 2h\right)$$

Fläche der Kappe

$$A_{Mantel} = 2 p r h$$

$$A_{Mantel} = d p h$$

$$A_{Mantel} = p\left(r^2 + h^2\right)$$

Oberfläche

$$O = p\left(2 r h + r^2\right)$$

$$O = p\left(h^2 + 2 r^2\right)$$

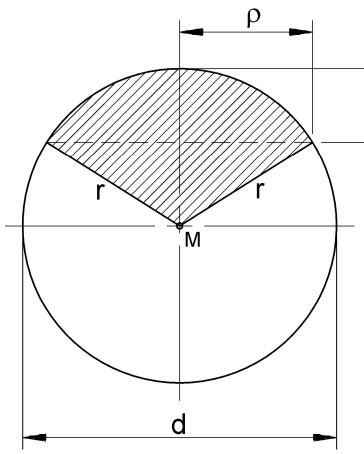
$$O = p h \left(4 r - h\right)$$

Radius des Schnittkreises:

$$r = \sqrt{h\left(2r - h\right)}$$

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

Kugelausschnitt - Kugelsektor



Volumen

$$V = \frac{2}{3} p r^2 h$$

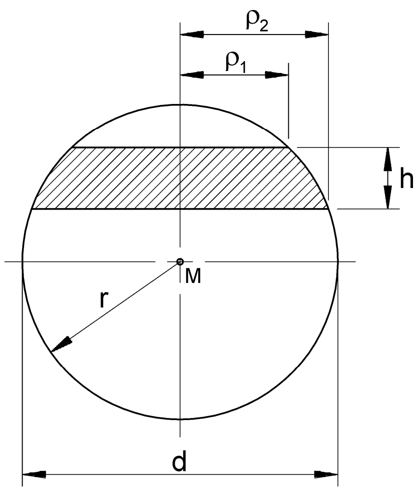
$$V = \frac{p}{6} d^2 h$$

Oberfläche

$$O = p r\left(2h + r\right)$$

$$O = 2pr\left(h + \frac{1}{2}\sqrt{h(2r - h)}\right)$$

Kugelschicht - Kugelzone



Volumen

$$V = \frac{p}{6} h\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$$

Mantel (ohne Deckflächen)

$$A_{Mantel} = 2prh$$

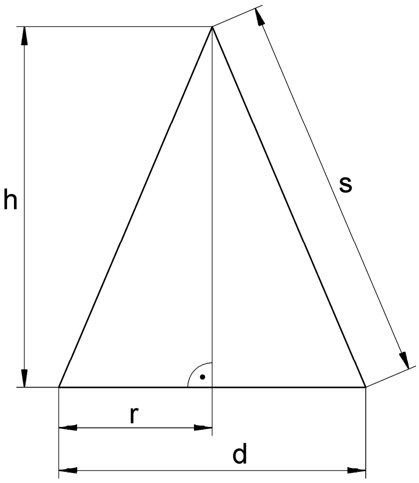
$$A_{Mantel} = dph$$

Oberfläche

$$O = p\left(2rh + r_1^2 + r_2^2\right)$$

$$O = p\left(dh + r_1^2 + r_2^2\right)$$

Gerader Kegel



Volumen

$$V = \frac{1}{3} p r^2 h$$

Mantel

$$A_{Mantel} = rps$$

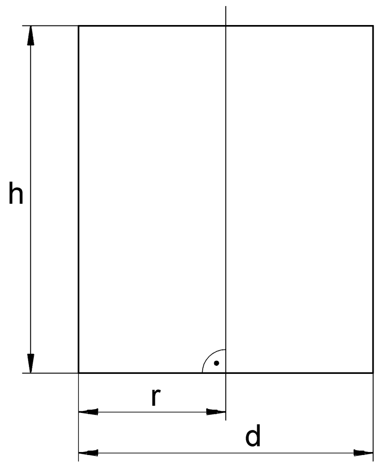
Oberfläche

$$O = rp(r + s)$$

Länge der Kegelmantellinie: $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Kugel und Kugelteile / Kegel / Zylinder

Gerader Zylinder



Volumen

$V = r^2 p h$

$V = \frac{d^2 p}{4} \times h$

Mantel

$A_{Mantel} = 2 p r h$

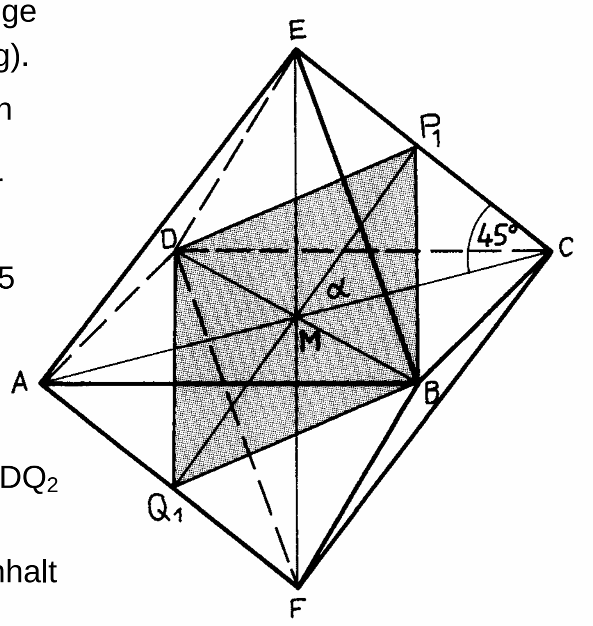
$A_{Mantel} = d p h$

Oberfläche

$O = 2 p r (r + h)$

$O = d p \left(\frac{d}{2} + h \right)$

Raumgeometrie - Sonstige Körper



1.0 Ein Oktaeder ist gegeben durch seine Kantenlänge $\overline{AB} = a = 5\text{cm}$ (alle Körperkanten sind gleich lang).

Der Körper wird von Ebenen BP_nDQ_n geschnitten wobei $P_n \in [CE]$ und $Q_n \in [AF]$.
Der Winkel zwischen einer Schnittebene und der Grundfläche ABCD hat das Maß α_n.

1.1 Zeichne ein Schrägbild des Oktaeders mit q = 0,5 und ω = 45° und eine Schnittfläche BP_1DQ_1 ein.

Welche Form hat diese Schnittfläche ?

1.2 Berechne das Maß des Winkels ACE.

1.3 Berechne den Flächeninhalt der Schnittfigur BP_2DQ_2 für α_2 = 70°.

1.4 Berechne das Maß des Winkels α_3 für den der Inhalt der Schnittfläche ein Minimum wird.
Wie groß ist der Flächeninhalt ?

1.5 Die Punkte A, B, D, P_2 bilden eine Pyramide.
Berechne das Volumen dieser Pyramide für α_2 = 70°.

Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

1. Gegeben ist ein Quader ABCDEFGH mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BF} = 1{,}5a$ und $\overline{BC} = 2a$. Um die Gerade AB rotiert eine Ebene („Pendelebene“). Sie schließt mit der Grundfläche den Winkel φ ein.
Für $\varphi \in [0°; 90°]$ schneidet sie aus dem Quader Rechtecke aus. Es soll der Flächeninhalt der Schnittfläche in Abhängigkeit von a und φ bestimmt werden.
Erstelle für a = 5 cm eine Wertetabelle und zeichne den Graphen; $\varphi \in [0°; 90°]$

2.0 Ein gerades Prisma hat ein Rechteck als Grundfläche. Die Seitenlängen sind $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = 2a$, die Höhe des Prismas (Quaders) ist 3,5a. Ebenen des Ebenenbüschels mit BC als Achse schneiden das Prisma in Rechtecken.

2.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas für a = 3 cm, ω = 45°; q = 0,5.
Trage zwei Schnittfiguren in das Schrägbild ein.

2.2 Die Schnittebenen des Büschels schließen mit der Grundfläche Winkel mit dem variablen Maß φ ein. Berechne den Flächeninhalt A der Schnittfiguren in Abhängigkeit von a und φ.
Lösungshinweis: Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

2.3 Für welche Werte von φ und a = 3 cm erhält man Schnittflächen mit einem Flächeninhalt von 30 cm^2 ?

2.4 Mit welchen Werten für φ und a = 3 cm erhält man Schnittflächen mit einem Flächeninhalt von 78 cm^2 ?

3.0 Ein gerades Prisma ABCDEF mit 10 cm Höhe hat ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm als Grundfläche. Der Punkt D liegt dabei senkrecht über A. Ebenen des Ebenenbüschels mit AB als Büschelgerade schneiden das Prisma in Dreiecken bzw. Trapezen.

3.1 Zeichne ein Schrägbild des Prismas für ω = 60° und q = 0,5. Die Seite [AC] des Dreiecks soll dabei auf der Rissachse liegen.
Trage zwei Schnittfiguren in das Schrägbild ein.

3.2 Die Ebenen des Büschels schließen mit der Grundfläche den Winkel ε ein. Für welche Belegung von ε erhält man als Schnittfiguren Dreiecke bzw. Trapeze ?

3.3 Ermittle den Flächeninhalt $A(\varepsilon)$ der Schnittflächen in Abhängigkeit von ε.

$$\left[\text{Ergebnis}: A(\varepsilon) = \frac{9\sqrt{3}}{\cos\varepsilon}\text{cm}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad A(\varepsilon) = \left(\frac{60}{\sin\varepsilon} - \frac{100\sqrt{3}\cdot\cos\varepsilon}{3\cdot\sin^2\varepsilon}\right)\text{cm}^2\right]$$

3.4 Widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels die Behauptung, dass die Schnittfläche ABF den größten Flächeninhalt besitzt.

Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

4.0 Das Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 6\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\text{cm}$ ist Grundfläche einer 10 cm hohen Pyramide. Die Spitze S liegt dabei senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundkante [AD].

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide für q = 0,75 und ω = 45°. Die Kante [CD] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

4.2 Ermittle durch Rechnung das Maß φ^* des Winkels, den die Seitenfläche ABS mit der Grundfläche einschließt, sowie das Maß des Winkels SCM.

4.3 Ebenen schneiden die Pyramide in gleichschenkligen Trapezen BCF_nE_n. Sie schließen mit der Grundfläche Winkel mit dem Maß φ ein.
Berechne den Flächeninhalt der Trapeze in Abhängigkeit von φ.

5.0 Bei einer Pyramide ABCDS, deren Grundfläche ein Quadrat ABCD mit der Seite a ist, liegt die Spitze S senkrecht über dem Grundflächeneckpunkt D mit $\overline{SD} = a\sqrt{6}$.
Ebenen, die die Grundflächendiagonale [AC] enthalten und mit der Grundfläche ABCD Winkel BMP mit dem Maß φ einschließen, schneiden die Pyramide ABCDS für $\varphi \in]0°; 180°[$ jeweils in einem gleichschenkligen Dreieck ACP, dessen Basiswinkel CAP das Maß ε hat.

5.1 Zeige: $\sphericalangle SBD = 60°$; $\sphericalangle DAS = \sphericalangle SCD = 67{,}8°$; $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SBA = 69{,}3°$.

5.2 Bestätige jeweils durch Rechnung:

a) $\overline{MP} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \tan\varepsilon$ **b)** $A_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \tan\varepsilon$

5.3 Für welchen Winkel ε gilt $A_{\Delta ACP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$?

5.4 Wie groß ist ε, wenn $A_{\Delta ACP} = A_{\Delta ABC}$ erfüllt ist ? Welches Maß φ hat in diesem Fall $\sphericalangle BMP$, und wie lang ist dann die Strecke [BP] ?

5.5 Berechne φ, ε und $\overline{BP}$ für den Fall, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ACP minimal ist.

5.6 Zeige für ε die Beziehung $40{,}9° \le \varepsilon \le 74{,}5°$.

5.7 Begründe, warum es zu einem Winkel ε mit $\varepsilon \in]45°; 74{,}5°[$ jeweils zwei verschiedene Schnittdreiecke ACP_1 mit $P_1 \in [BS]$ und ACP_2 mit $P_2 \in [SD]$ gibt.

5.8 Berechne ε und $\overline{BP}$ für φ = 90°.

5.9 Für φ = 90° stellt ABCDP eine gerade quadratische Pyramide mit P als Spitze dar.
In welchem Verhältnis stehen in diesem Fall das Volumen der Pyramide ABCDS und das Volumen der Pyramide ABCDP zueinander ?

5.10 Wie groß ist φ, wenn das Schnittdreieck ACP mit dem Dreieck ACS übereinstimmt ?
Begründe, dass in diesem Fall das Schnittdreieck ACP maximalen Flächeninhalt besitzt, und gib diesen an.

Raumgeometrie

ebene Schnitte - funktionale Abhängigkeiten

6.1 Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge 2a bildet die Grundfläche der Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über A mit $\overline{SA} = 3a$ liegt. Zeichne von der Pyramide ABCS mit a = 4 cm ein Schrägbild (q = 0,5; ω = 45°). Die Symmetrieachse AE des Dreiecks ABC mit $E \in [BC]$ soll Rissachse sein.

6.2 Zeige, dass $\sphericalangle ASE = \varphi = 30°$ und $\overline{ES} = 2a\sqrt{3}$ gilt.

6.3 Parallelen zu [BC] schneiden [BS] in P und [CS] in Q. Die Punkte P und Q und der Mittelpunkt M der Strecke [AS] bilden jeweils gleichschenklige Dreiecke PQM. Zeichne ein Dreieck PQM in das Schrägbild ein, und bezeichne den Mittelpunkt der Strecke [PQ] mit F. Berechne die Länge der Strecken [FS] und [PQ] in Abhängigkeit von a und $\sphericalangle FMS = \varepsilon$.
Für welchen Wert von ε gilt $\overline{PQ} = a\sqrt{3}$?

7.0 Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a = 5 cm, die Höhe ist 9 cm lang.
Durch eine Seitenkante des Prismas wird eine Schnittebene gelegt (GHFC).

7.1 Berechne den Umfang u der Schnittfläche in Abhängigkeit von φ und stelle u(φ) für $\varphi \in [0°; 60°]$ mit $\Delta\varphi = 10°$ graphisch dar.
Bestimme Maximum und Minimum des Umfangs.

7.2 Berechne den Flächeninhalt A der Schnittfläche in Abhängigkeit von φ.
Stelle A(φ) graphisch dar und bestimme Minimum und Maximum des Flächeninhalts.

8.0 Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a. Die Höhe des Prismas beträgt $\frac{5}{2}a$. Ein ebener Schnitt wird so geführt, dass er die Seite [AB] enthält. Als Schnittfiguren entstehen gleichschenklige Dreiecke oder Trapeze.

8.1 Berechne den Umfang u der Schnittfläche in Abhängigkeit von a und δ; $\delta \in [0°; 90°]$.
Fallunterscheidung hinsichtlich δ.
Hinweis: Berechne zunächst das Maß δ_0, für welches die Schnittfläche durch F geht.

8.2 Stelle für a = 10 cm eine Wertetabelle für u(δ) mit $\Delta\delta = 10°$ auf.
Zeichne den Graphen und entnimm ihm Maximum und Minimum.

Realschule

Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10

Was sind Schrägbilder und welchen Zweck haben sie?

Durch ein Schrägbild wird auf einer ebenen Fläche (z.B. Blatt Papier) ein Körper räumlich dargestellt (räumliche Perspektive des Körpers).

Es gibt sehr viele Methoden der perspektivischen Darstellung (z.B. isometrische, dimetrische Perspektive, Vogelperspektive oder Kavalierperspektive, um nur einige zu nennen). Ich beschränke mich hier auf die Kavalierperspektive, ein in Realschulen übliches Verfahren.

Welche Körper kommen für die Schrägbilddarstellung infrage?

Grundsätzlich können alle Körper dargestellt werden. Wir beschränken uns hier auf Prismen und Pyramiden mit verschiedenen Grundflächen.

Wie wird das Schrägbild eines Körpers gezeichnet?

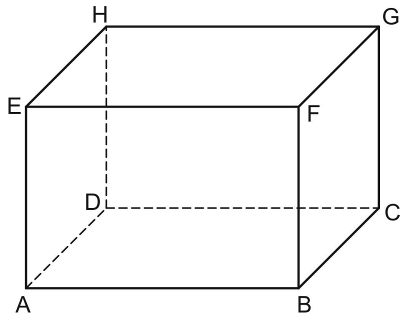
Jeder dieser Körper hat eine Grundfläche. Die Grundfläche wird zunächst in **wahrer Größe** auf das Blatt gezeichnet. Allerdings hat man beim Zeichnen darauf zu achten, wie die Grundfläche auf der Blattebene positioniert wird. Meistens ist vorgegeben welche Kante oder Symmetrielinie auf der Rissachse liegen soll. Die Rissachse ist eine Hilfslinie. Alle auf ihr liegenden Punkte werden nicht verändert; es sind sog. Fixpunkte. Die Rissachse wird auch Schrägbildachse genannt.

Von den Punkten aus, die nicht auf der Rissachse liegen, fällt man das Lot (Senkrechte) auf die Rissachse.
Durch diese Schnittpunkte des Lotes mit der Rissachse wird nun der Verzerrungswinkel ω angetragen.
Zuletzt wird noch der Verkürzungsfaktor q benötigt. Er bestimmt, mit welchem Faktor die wahren Längen, die in die Blattebene hineinlaufen, verkürzt werden. Der Verkürzungsfaktor ist zum Beispiel $q = 0,5$ oder $q = 0,7$.

Dazu muss die Lotstrecke mit dem Verkürzungsfaktor q multipliziert und diese Länge auf dem Schenkel des Verzerrungswinkels angetragen werden. Nun kann die neue (verzerrte) Grundfläche gezeichnet werden.
Dort wo zur Grundfläche senkrechte Körperkanten vorhanden sind, werden diese in wahrer Länge gezeichnet.
Bei Pyramiden können keine senkrechten Kanten angetragen werden, hier muss man die Pyramidenhöhe einzeichnen und von der Spitze aus die Kanten zur Grundfläche ziehen.

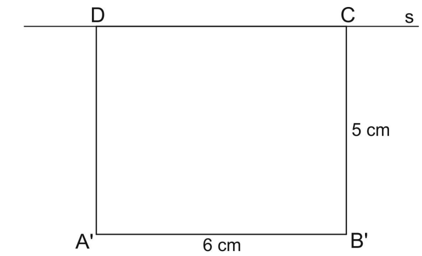
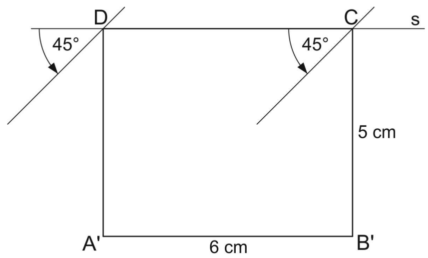
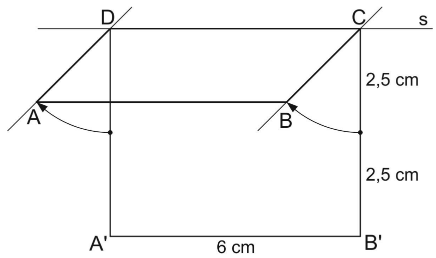
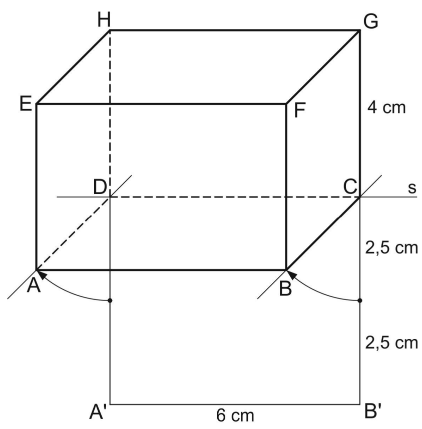
Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10



An einem Beispiel wird die Vorgehensweise dargestellt.

Aufgabe:
Zeichne das Schrägbild eines Quaders ABCDEFGH
mit $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 5\text{ cm}$, $\overline{AE} = 4\text{ cm}$.
Der Verzerrungswinkel ist $\omega = 45°$, der Verkürzungsfaktor ist $q = 0{,}5$.
Die Kante [CD] soll auf der Rissachse s liegen.

Zunächst ist die Rissachse s und die Grundfläche A'B'CD des Quaders in **wahrer Größe** zu zeichnen. Die Strecke [CD] liegt auf der Rissachse. Die Punkte, die nicht auf der Rissachse liegen, erhalten einen Strich (A' bzw. B').	
Grundsätzlich ist von allen Punkten die nicht auf der Schrägbildachse liegen ein Lot zu fällen. [A'D] sowie [B'C] stehen bereits senkrecht auf der Rissachse, d.h. das Lot ist bereits vorhanden. In den Lotfußpunkten D und C ist jeweils der Schenkel des Verzerrungswinkels ω anzutragen (hier 45°). Wichtig ist zu wissen, dass der Winkel stets von der Rissachse aus angetragen wird und zwar links herum.	
Im nächsten Schritt werden die Lote = Streckenlängen [A'D] sowie [B'C] mit dem Verkürzungsfaktor $q = 0{,}5$ multipliziert und die verkürzte Länge (hier 2,5 cm) wird von der Rissachse aus auf den Schenkeln der Winkel ω angetragen. Man erhält die Strecken [AD] und [BC] sowie [AB]. Das Parallelogramm ABCD ist die verzerrte Grundfläche des Quaders.	
Im letzten Schritt werden in den Punkten ABCD die senkrechten Kanten des Quaders in wahrer Länge (hier 4 cm) gezeichnet. Damit erhält man die Punkte EFGH der Deckfläche. Bei einem Quader sind Grundfläche und Deckfläche deckungsgleich. Diejenigen Kanten, die im Hintergrund liegen, die also vom Körper verdeckt sind, können gestrichelt gezeichnet werden. In unserem Fall sind dies die Kanten [AD], [CD] und [DH]. Dadurch verbessert sich der räumliche Eindruck.	

Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10

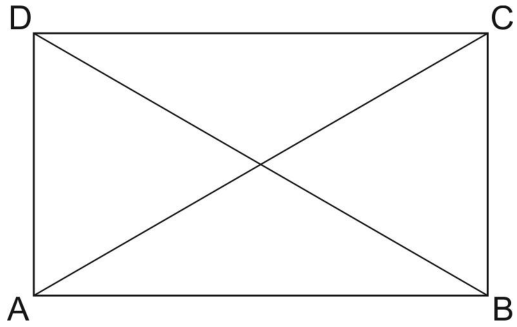
Ein weiteres Beispiel

Aufgabe:

Es ist das Schrägbild eines geraden Prismas mit rechteckiger Grundfläche ABCD zu konstruieren. Die Rechteckdiagonale AC soll auf der Schrägbildachse (Rissachse) liegen. Der Verzerrungswinkel ω betrage 60° und der Verkürzungsfaktor q sei 0,5.

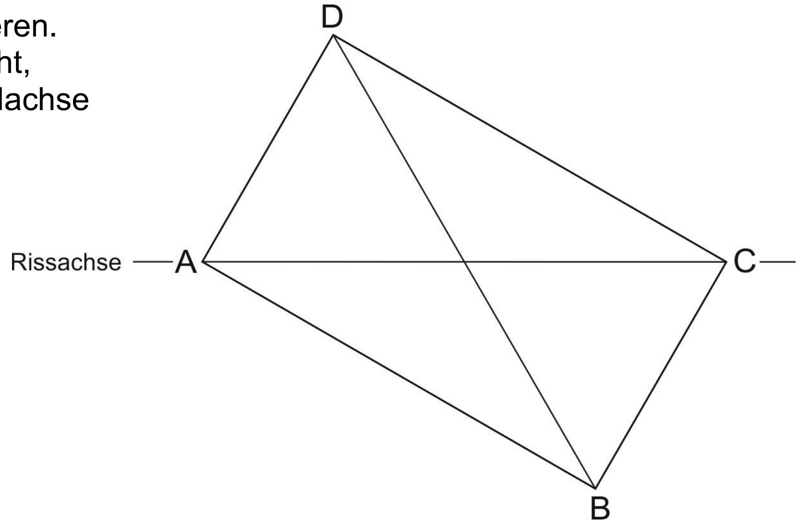
Ich stelle hier den Konstruktionsvorgang in ausführlichen Schritten dar.

Das gegebene Rechteck ist im ersten Bild zu sehen.
In dieser Lage könnte es zunächst (separat) gezeichnet werden, um die Länge der Diagonalen festzulegen.

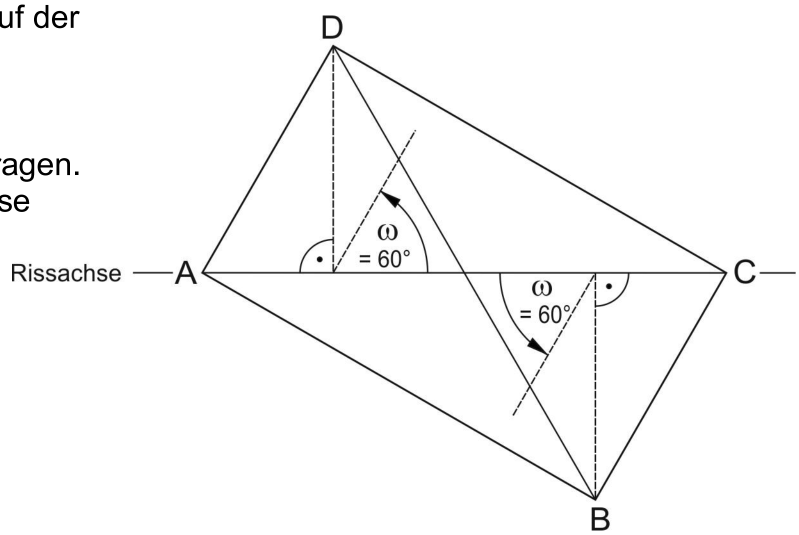


Das Rechteck ist gedreht zu konstruieren.
Die Diagonale AC liegt nun waagerecht, da diese Diagonale mit der Schrägbildachse zusammenfallen soll.

Die Schrägbildachse liegt im Allgemeinen immer waagerecht auf der Zeichenfläche.



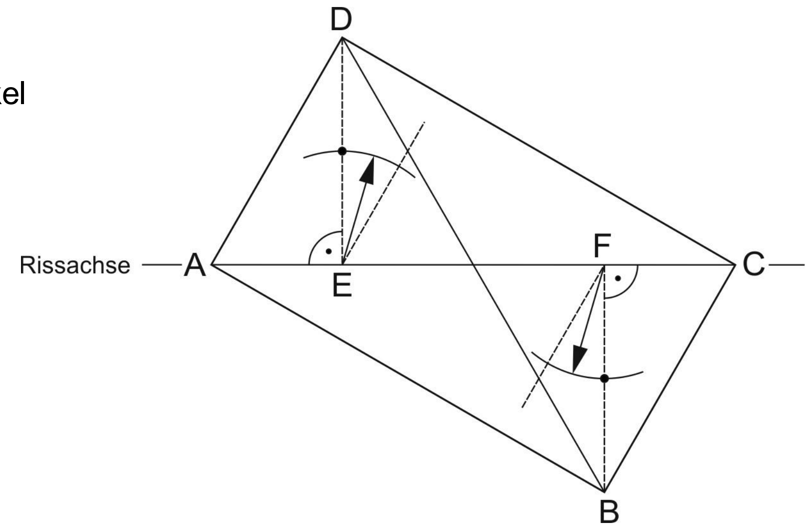
Von allen Eckpunkten aus, die nicht auf der Rissachse liegen (hier B und D) ist das Lot auf die Rissachse zu fällen.
In diesen Lotfußpunkten wird nun der Verzerrungswinkel ω (hier 60°) angetragen.
Der Winkel ist immer von der Rissachse ausgehend links herum (entgegen dem Uhrzeigersinn) anzutragen.



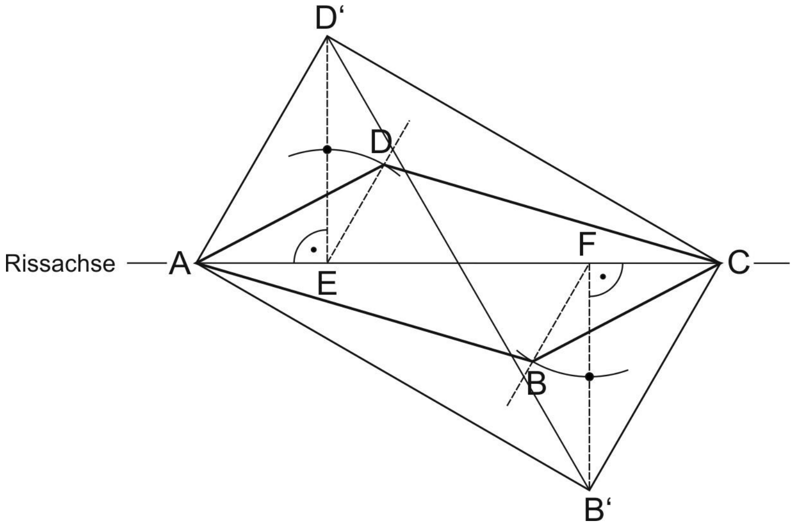
Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10

Die Strecken [ED] und [FB] sind nun zu halbieren (wegen q = 0,5); diese halben Strecken werden mit dem Zirkel auf den Schenkel des Verzerrungswinkels (60°) übertragen.

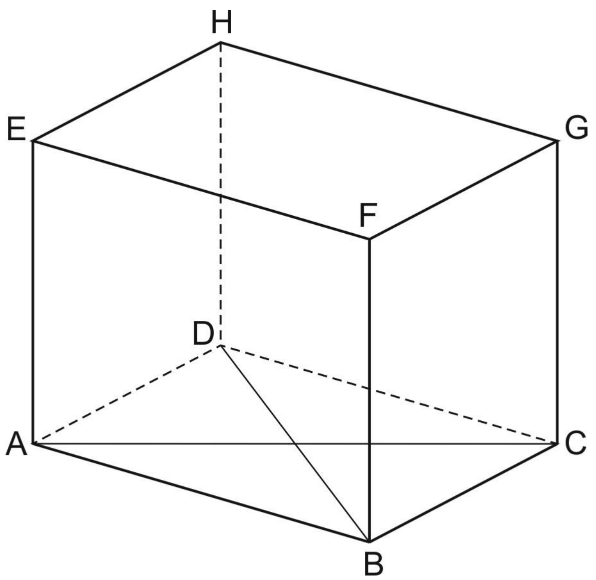


Diese Punkte (hier mit B und D) bezeichnet, ergeben zusammen mit A und C das verzerrte Rechteck.



Ich lasse nun alle Konstruktionslinien, die nicht benötigt werden, weg, so dass nur noch das Parallelogramm ABCD (das verzerrte Rechteck) zu sehen ist. In den Eckpunkten ABCD wird die wahre Höhe des Prismas angetragen.

Zuletzt wird die Deckfläche EFGH gezeichnet. Das Prisma in Schrägbilddarstellung ist nun fertig.



Realschule

Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10

Aufgaben

1. Gegeben ist der Quader ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm und $\overline{AE} = 5$ cm.
Zeichne ein Schrägbild des Quaders. Die Kante CD soll auf der Rissachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$.

2. Ein Quader ABCDEFGH ist festgelegt durch die Kantenlängen
$\overline{AB} = 6\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 8\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 5\,\text{cm}$.
Zeichne ein Schrägbild mit $q = 0{,}5$; $\omega = 60°$
Die Diagonale AC soll auf der Schrägbildachse liegen.

3. Das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines Prismas ABCDEF mit $\overline{AD} = 7\,\text{cm}$.
Zeichne ein Schrägbild mit $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$ so dass die Seite [CA] auf der Schrägbildachse liegt.

4. Die Raute ABCD mit $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 8\,\text{cm}$ ist Grundfläche eines geraden Prismas ABCDEFGH mit der Höhe $\overline{AE} = 8\,\text{cm}$.
Zeichne ein Schrägbild des Prismas mit $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$; [AC] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

5. Die Grundfläche eines 8 cm hohen, regulären (regelmäßigen) Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 5$ cm.
Zeichne ein Schrägbild des Prismas mit $q = 0{,}5$; $\omega = 60°$. Eine Dreiecksseite soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

6. Ein gerades Prisma mit der Höhe 9 cm hat ein reguläres (regelmäßiges) Sechseck mit jeweils 5 cm langen Seiten als Grundfläche.
Zeichne ein Schrägbild des Prismas für $\omega = 45°$ und $q = 0{,}5$. Eine Diagonale des Sechsecks soll dabei auf der Rissachse liegen.

7. Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 7 cm ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe $h = 8$ cm. S ist die Pyramidenspitze.
Fertige ein Schrägbild der Pyramide ABCDS an.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$.

Schrägbilder zeichnen

Klassen 8 bis 10

8. Die Raute ABCD mit den Diagonalenlängen $\overline{AC} = 12\text{ cm}$ und $\overline{BD} = 8\text{ cm}$ ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS} = 8\text{ cm}$. Dabei ist M Schnittpunkt der Diagonalen [AC] und [BD]. S ist die Pyramidenspitze.
Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS mit $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

9. Das gleichschenklige Trapez ABCD mit den Grundseiten $\overline{AB} = 8\text{ cm}$ und $\overline{CD} = 5\text{ cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$ liegt. Die Trapezhöhe ist 4 cm und die Pyramidenhöhe ist $h = \overline{MS} = 6\text{ cm}$.
Zeichne die Grundfläche ABCD und darauf aufbauend ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. Die Schrägbildachse (Rissachse) soll durch die Symmetrieachse des Trapezes verlaufen. Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 30°;$

10. Das gleichseitige Dreieck ABC mit $a = 7\text{ cm}$ ist Grundfläche einer geraden Pyramide ABCS. M ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Der Fußpunkt der Pyramidenhöhe h liegt im Schnittpunkt der Höhenlinien des Dreiecks ABC.
Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit MB als Schrägbildachse, $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$.
Für die Zeichnung: $h = 8\text{ cm}$.

11. Das Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge 10 cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Eckpunkt A des Quadrats. Die Pyramidenhöhe ist $\overline{AS} = 8\text{ cm}$.
Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCDS. [AC] soll auf der Schrägbildachse liegen. Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 45°$.

12. Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge 2a bildet die Grundfläche der Pyramide ABCS, deren Spitze S senkrecht über A mit $\overline{SA} = 1{,}5a$ liegt. Zeichne von der Pyramide ABCS mit $a = 4\text{ cm}$ ein Schrägbild ($q = 0{,}5;\ \omega = 45°$). Die Symmetrieachse AE des Dreiecks ABC mit $E \in [BC]$ soll Rissachse sein.

13. Gegeben ist das Tetraeder ABCD mit der Kantenlänge $a = 10\text{ cm}$.
Zeichne ein Schrägbild des Tetraeders mit $q = 0{,}5;\ \omega = 60°$ und AB als Rissachse.
Für die Tetraederhöhe gilt $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

14. Gegeben ist das Tetraeder ABCD mit der Kantenlänge $a = 8\text{ cm}$.
Zeichne ein Schrägbild des Tetraeders.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5;\ \omega = 60°;$ AC ist Rissachse

Schrägbilddarstellung - wahre Längen und Winkel ermitteln

1. Zeichne das Schrägbild (ω = 45°; q = 0,5) des Quaders ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AE} = 5\text{ cm}$ und konstruiere die wahre Größe von

a) $\overline{CF}$ und $\overline{BH}$,

b) $\overline{FH}$ und $\overline{EC}$!

Zeichne die gesuchten Strecken in das Raumbild !

2. Gegeben sind der Quader ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AE} = 5\text{ cm}$ und die Punkte P, Q, R mit

$P \in [AE]$; $\overline{AP} = 2\text{cm}$,

$Q \in [BC]$; $\overline{BQ} = 3\text{cm}$,

$R \in [DH]$; $\overline{DR} = 4\text{cm}$.

a) Zeichne das Schrägbild (ω = 45°; q = 0,5).

b) Konstruiere das Dreieck PQR in wahrer Größe und miss den Winkel $\varphi = \sphericalangle PRQ$!

3. Gegeben ist der Würfel ABCDEFGH mit $\overline{AB} = 5\text{cm}$. Die Punkte P, Q, R sind die Mittelpunkte der Kanten [AB], [FG] bzw. [DH].

Zeichne das Schrägbild (ω = 45°; q = 0,5) !

Konstruiere das Dreieck PQR in wahrer Größe und miss alle Winkel !

4. Gegeben sind der Quader ABCDEFGH durch $\overline{AB} = 6\text{ cm}$, $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AE} = 3\text{ cm}$ und die Punkte P, Q, R: P liegt auf [BF] mit $\overline{BP} = 1\text{cm}$; Q liegt auf [GH] mit $\overline{GQ} = 4{,}5\text{ cm}$; R liegt auf [AD] mit $\overline{AR} = 2\text{ cm}$.

Bestimme folgende Neigungswinkel:

a) Gerade PR gegen Ebene ABC

b) Gerade PQ gegen Ebene DCG

c) Gerade RQ gegen Ebene EFG

d) Gerade PQ gegen Ebene CGF

5. Gegeben ist eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit 4 cm Seitenlänge ist. Der Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche beträgt 60°. Konstruiere die Körperhöhe in wahrer Größe und zeichne ein Schrägbild.

6. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Dreieck mit $\overline{AB} = 4\text{ cm}$, $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, $\overline{AC} = 5\text{ cm}$. Die Körperhöhe beträgt 7 cm. Die Punkte P, Q und R liegen auf [AB] mit $\overline{AP} = 1\text{cm}$, $\overline{AQ} = 2\text{ cm}$, $\overline{AR} = 3\text{ cm}$.
Bestimme die Neigungswinkel der Geraden AS, PS, QS, RS und BS gegen die Grundfläche ! Wann wird dieser Winkel am größten ?

7. Eine Ägyptische Pyramide ist 146 m hoch, ihre Seitenkanten sind 219 m lang. Die Grundfläche der Pyramide ist quadratisch.
Wie lang sind die Seiten der Grundfläche ? Konstruiere in einem geeigneten Maßstab !

