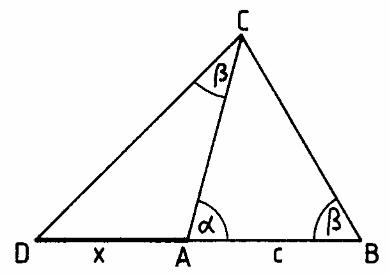
Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

1. Gemäß nebenstehender Zeichnung sind die Stücke $\overline{AB} = c$, α und β gegeben. Stelle eine Gleichung für die Strecke $\overline{AD} = x$ in Abhängigkeit von c, α und β auf.



2. Gegeben sind:

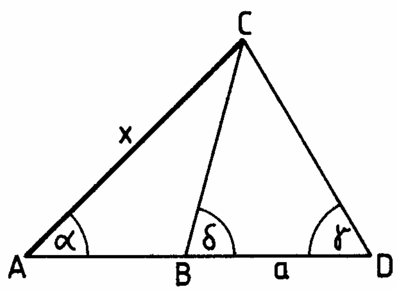
$\overline{BD} = a = 52\ \text{m}$

$\alpha = 41{,}6°$

$\delta = 78{,}2°$

$\gamma = 62{,}5°$

Stelle eine Gleichung für x in Abhängigkeit von a, α, γ und δ auf und berechne x auf 2 Nachkommastellen.

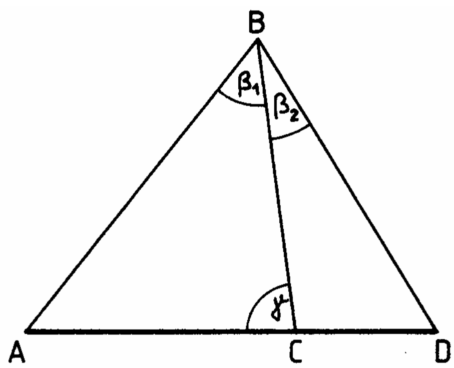


3. Um eine Strecke $\overline{AD} = x$ zu bestimmen, deren Endpunkte nicht zugänglich sind, wählt man sich auf $\overline{AD}$ einen Punkt C, von dem A und D sichtbar sind, sowie außerhalb der Strecke einen geeigneten Hilfspunkt B. Man misst $\overline{BC} = 212.40$ m, Winkel BCA = $\gamma = 81°17'$,

Winkel ABC = $\beta_1 = 34°45'$ und

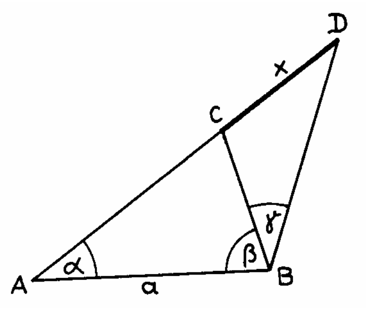
Winkel CBD = $\beta_2 = 28°32'$

Berechne die Länge der Strecke x.



4. Gegeben ist die Strecke $\overline{AB} = a$ mit 18 m sowie die Winkel $\alpha = 55°$, $\beta = 62°$ und $\gamma = 21°$ (siehe Skizze). Gib eine möglichst kurze Gleichung für die Strecke $\overline{CD} = x$ in Abhängigkeit von a, α, β und γ an.

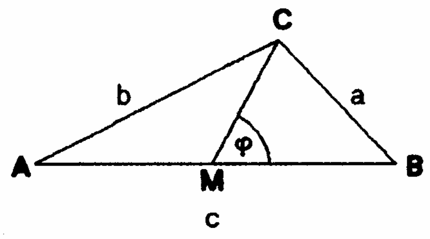
Berechne x für die angegebenen Werte auf zwei Stellen nach dem Komma.



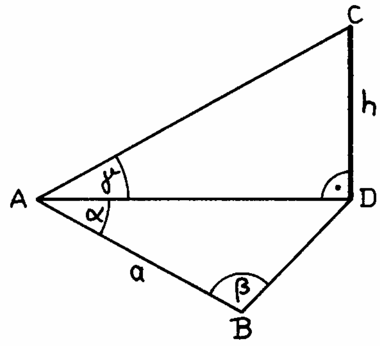
5. Im $\triangle ABC$ sind die Seiten a = 12 cm, b = 8 cm und c = 14 cm gegeben.

Berechne den $\sphericalangle BMC = \varphi$.

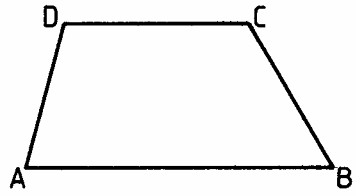
$(\overline{AM} = \overline{MB})$



6. In nebenstehender Zeichnung sind die Winkel α, β und γ sowie die Strecke $\overline{AB}$ = a gegeben. Ausserdem gilt $\overline{CD} \perp \overline{AD}$. Gib eine Gleichung für die Strecke $\overline{CD}$ = h in Abhängigkeit von α, β, γ und a an.

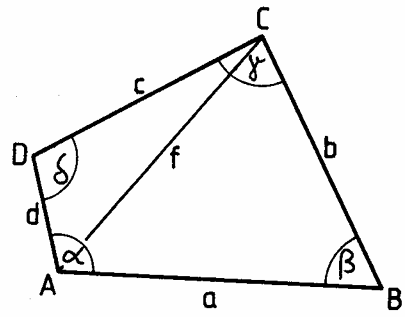


7. In einem Trapez mit den parallelen Seiten [AB] und [CD] sind gegeben:
$\overline{AB}$ = 7cm, $\overline{CD}$ = 3cm, $\overline{BC}$ = 6cm, $\overline{AD}$ = 5 cm.
Berechne die Innenwinkel auf zwei Nachkommastellen.



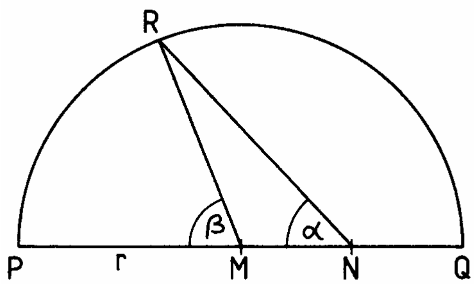
8. Im Viereck ABCD sind folgende Stücke gegeben:
$\overline{BC}$ = b = 4,00 cm
$\overline{CD}$ = c = 5,00 cm
$\overline{AD}$ = d = 1,50 cm
Winkel BAD = α = 105,00°
Winkel ADC = δ = 100,00°

Gesucht sind f und a !

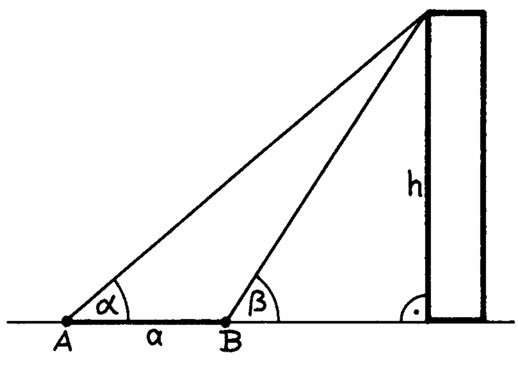


9. Gegeben ist ein Halbkreis mit Radius r = 9cm**.**
Auf dem Halbkreis befindet sich ein Punkt R. M ist der Kreismittelpunkt und N die Mitte des Radius r. Weiterhin ist gegeben der Winkel RNM = α = 54°.

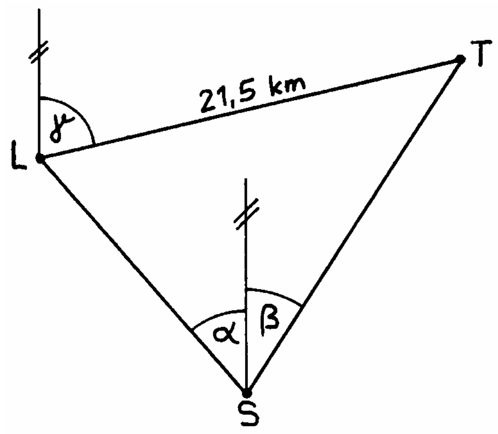
Berechne den Winkel RMP = β.



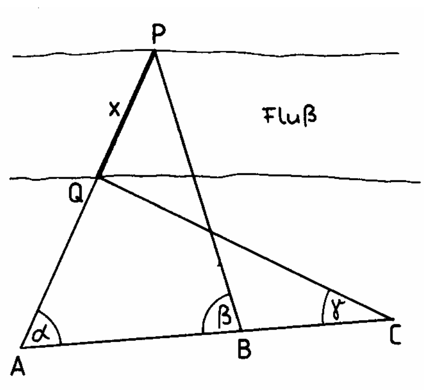
10. Von einem Punkt A aus sieht man die Spitze eines Turmes unter einem Erhöhungswinkel (Elevationswinkel) von α = 5°20' und von einem Punkt B aus unter einem Erhöhungswinkel von β = 16°45'. Beide Punkte sind 420m voneinander entfernt und befinden sich in einer Ebene mit dem Turm.
Stelle eine möglichst kurze Gleichung für die Turmhöhe h in Abhängigkeit von α, β und a auf.
Berechne h mit den angegebenen Werten.



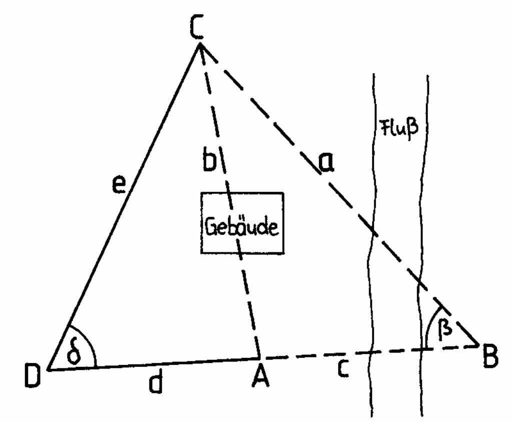
11. Von einem Schiff S aus peilt man zwecks Standortbestimmung einen Leuchtturm L unter α = 48°25' und einen Schornstein T unter β = 36°18' an.
Aus einer Karte entnimmt man die Strecke LT = 21,5 km und ihre Richtung mit γ = 72°50'.
Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm entfernt?



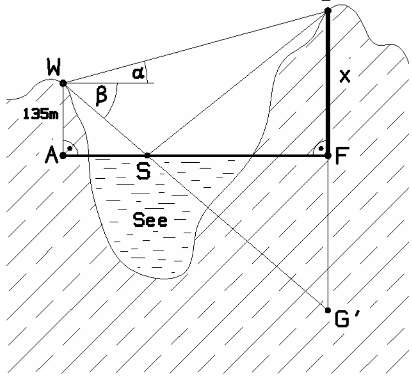
12. Der Abstand zweier Punkte P und Q lässt sich nicht direkt bestimmen. Auf der Verlängerung von $\overline{PQ}$ wird daher ein Punkt A markiert und von dort aus eine Standlinie AC abgesteckt. Weiterhin wurde auf $\overline{AC}$ ein Punkt B bestimmt.
Gemessen wurden folgende Größen:
$\overline{AB}$ = 105 m, $\overline{BC}$ = 84m, α = 76°, β = 82°, γ = 26°.
Berechne die Länge $\overline{PQ}$ auf zwei Stellen nach dem Komma.



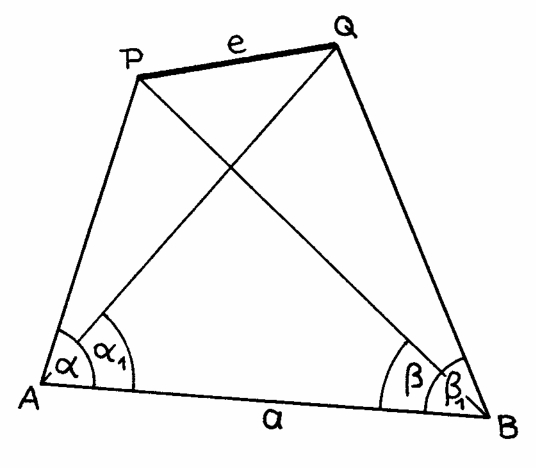
13. Bei einer Geländevermessung können die Strecken $\overline{AB}$ = c, $\overline{BC}$ = a und $\overline{AC}$ = b nicht direkt gemessen werden. Zur indirekten Bestimmung der gesuchten Strecken a, b und c misst man in B den Winkel $\beta = 48°29'$ und in einem Hilfspunkt D den Winkel $\delta = 59°38'$, sowie die Strecken $\overline{AD}$ = d = 340,52 m und $\overline{CD}$ = e = 486,18 m.
Berechne die gesuchten Längen auf zwei Stellen nach dem Komma.



14. Ein Wanderer W, der 135m über einem Bergsee steht, sieht den Gipfel G des Berges unter dem Erhebungswinkel α = 34° und das Spiegelbild G' des Berggipfels im See unter dem Tiefenwinkel β = 46°.
Berechne die Gipfelhöhe $\overline{FG}$ = x über dem See.



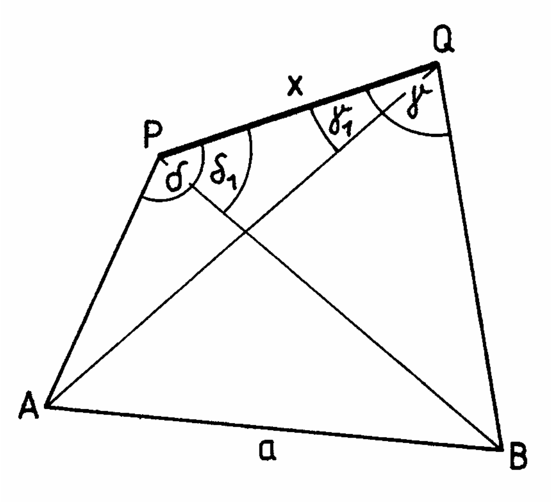
15. Die Entfernung e zweier Punkte P und Q soll bestimmt werden.
Zu diesem Zweck werden in zwei Punkten A und B mit dem bekannten Abstand $\overline{AB} = a$ die Winkel α und α_1 sowie β und β_1 gemessen.
Berechne die Strecke $\overline{PQ} = e$ für a = 20m, $\alpha = 65°$, $\alpha_1 = 42°$, $\beta = 38°$ und $\beta_1 = 56°$.
Gib eine allgemeine Gleichung für e in Abhängigkeit von a, α, α_1, β, und β_1 an.



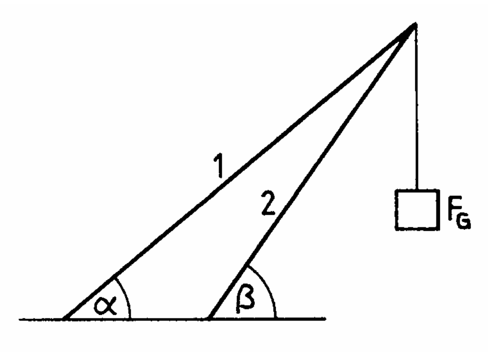
16. Es ist die Entfernung x zweier Punkte P und Q zu bestimmen.
Hierzu werden jeweils von P und Q die Punkte A und B mit bekanntem Abstand $\overline{AB} = a$ anvisiert und folgende Winkel gemessen:

$\gamma = 105{,}5°$; $\gamma_1 = 47{,}2°$;
$\delta = 102{,}8°$; $\delta_1 = 52{,}6°$;

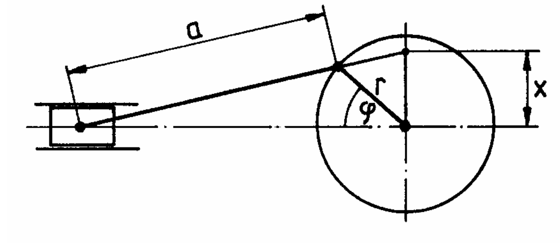
Die Strecke a ist 822,6 m lang.
Berechne x (Ergebnis und Zwischenwerte jeweils mit zwei Kommastellen runden).



17. Bei dem skizziertem Kranausleger sind die Winkel α und β sowie die Gewichtskraft F_G der angehängten Last gegeben.
Stelle jeweils die Gleichung für die in Strebe 1 auftretende Zugkraft F_1, und für die in Strebe 2 herrschende Druckkraft F_2 auf.

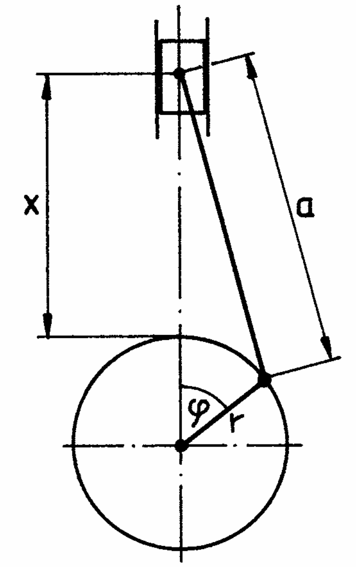


18. In einem Kurbelgetriebe ist die Strecke x aus dem Drehwinkel φ, dem Kurbelradius r und der Schubstangenlänge a zu bestimmen.
Berechne x mit r = 80mm, a = 360mm und $\varphi = 25°$.

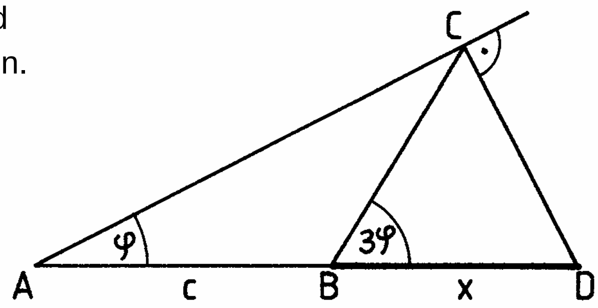


19. In einem Kurbelgetriebe ist die Strecke x aus dem Drehwinkel φ, dem Kurbelradius r und der Schubstangenlänge a zu bestimmen.

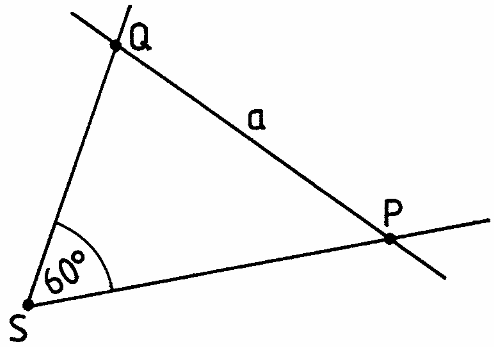
Stelle eine möglicht kurze Gleichung für die Strecke x in Abhängigkeit von a, r und φ auf.



20. In der dargestellten Dreieckskonstruktion sind die Strecke $\overline{AB} = c$ und der Winkel φ gegeben. Gib eine Gleichung für x in Abhängigkeit von c und φ an.

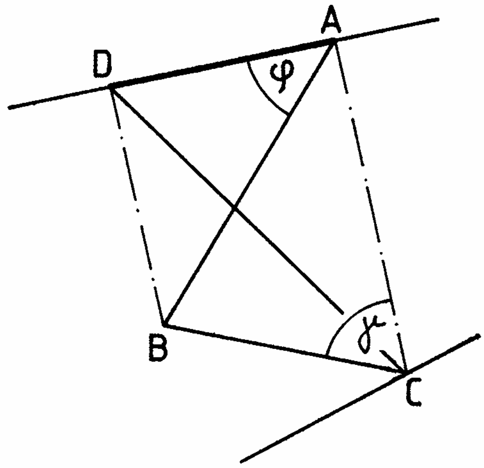


21. Ein 60°-Winkel mit dem Scheitel S ist durch eine Gerade so zu schneiden, dass die Längen der auf den Schenkeln liegenden Abschnitte $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ sich wie 5:4 verhalten und die Querstrecke $\overline{PQ}$ die vorgegebene Länge a hat. Gib eine Gleichung für $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ in Abhängigkeit von a an.



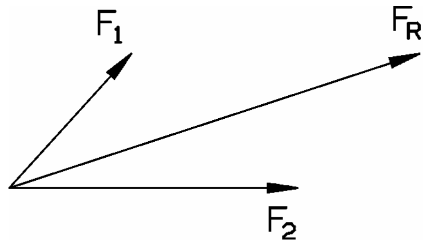
22. Die Grenzlinie von A über B nach C zwischen zwei Grundstücken soll so begradigt werden, dass sich die Grundstücksgrößen nicht ändern. Damit die neue Grenzlinie [CD] gezogen werden kann, muss die Länge der Strecke $\overline{AD}$ berechnet werden.

Folgende Messwerte sind bekannt:
$\overline{AB}$ = 269,5 m; $\overline{BC}$ = 109,2 m;
Winkel ACB = γ = 46,1°;
Winkel DAB = φ = 74,8°.



23. Die Kräfte F_1 = 240 N und F_2 = 380 N greifen an einem gemeinsamen Punkt an und schließen einen Winkel von φ = 48° ein.

Wie groß ist die resultierende Kraft F_R ?
Welchen Winkel bildet sie mit F_2 ?



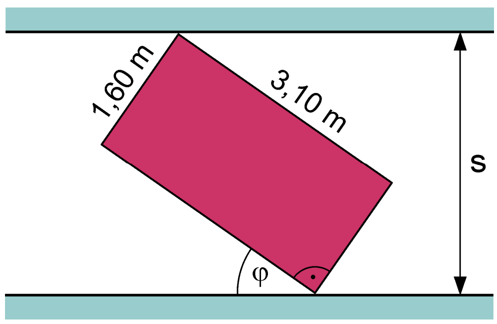
Trigonometrie - Sammelsurium

Diese Aufgaben sind ohne Systematik aufgenommen, einfach nur zusammengestellt und mit den unterschiedlichsten Kenntnissen bzw. Anforderungen lösbar.

1. Eine rechteckige Kiste, 1,60m breit und 3,10m lang, blockiert eine Durchfahrt.

a) Wie breit ist die Durchfahrt s, wenn $\varphi = 28°$ ist.

b) Welchen Wert hat φ, wenn die Durchfahrt 2,50m breit ist ?



2. Im Dreieck ABC ist folgendes gegeben:

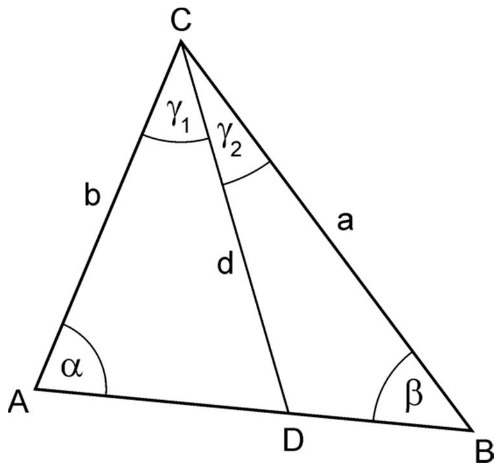
$\overline{AB} = 148\text{m}; \quad \overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$

$\gamma_1 = 32°; \quad \gamma_2 = 24°$

a) Berechne die Streckenlängen $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$.

b) Berechne α, a und b.

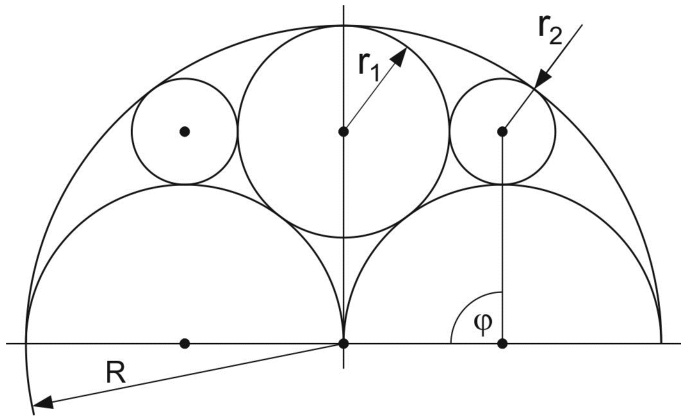
Lösungshinweis: Stelle d jeweils in Abhängigkeit von α bzw. β dar.



3. Gegeben ist die unten abgebildete Kreisdarstellung (die Kreise berühren sich).

Berechne die Radien r_1 und r_2 in Abhängigkeit von R.

Berechne das Maß des Winkels φ.



Trigonometrische Gleichungen

Ungleichungen

Bestimme jeweils die Lösungsmenge! $\mathbb{G} = [0; 360°[$ oder $[0; 2\pi[$

1. $-\frac{1}{2}\sqrt{3} < \sin\varphi \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. $\frac{1}{2} \leq |\cos\varphi| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. $\frac{3-\cos x}{|\sin x| - 0{,}5} > 0$

4. $2\sin 2x - 1 > 0$

5. $2\cos 2x - 1 < 0$

6. $\frac{\sin x - 3}{(\sin x + 2)(2\sin x - 1)} > 0$

7. $\frac{2-\cos 2x}{10\cos^2 x - 17\cos x + 6} < 0$

Trigonometrische Gleichungen mit 1 Unbekannten

Bestimme jeweils die Lösungsmenge! $\mathbb{G}$ = [0; 360°[oder [0; 2π[

1. $\sin 2x = -0{,}5$

2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}5$

3. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$

4. $\cos(\pi \cdot x) = 0{,}1$

5. $\tan(5x - 2) = 100$

6. $4\cos^2 x - 3 = 0$

7. $\sin x = (\tan x)^{-1}$

8. $\sin 2x = \cos x$

9. $\tan x - \sin x = 0$

10. $\sin x + \cos x = 1$

11. $\cos^2 x - \cos x - 0{,}5 = 0$

12. $3\sin x = 2\cos^2 x$

13. $2\cos^2 x + 4\sin x = 3$

14. $\sqrt{2} \cdot \sin^2 x + \sin x = 0$

15. $\sin x - x \cdot \sin x = 0$

16. $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 0$

17. $\cos 2x + 3\cos^2 x = 0$

18. $3\sin 2x - 2\cos x = 0$

19. $\tan x - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$

20. $2\tan x - 4\sin 2x = 0$

21. $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{3}$

22. $(\sin x+1)(\sin x-0{,}5)=0$

23. $(\tan x+\sqrt{3})(\cot x+1)=0$

24. $(\sqrt{3}+\tan x)(\sin 2x-\frac{1}{2}\sqrt{2})=0$

25. $(\sqrt{3}+\tan\beta)(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\cos 2\beta)=0$

26. $(\sqrt{3}+2\sin\beta)(\cos 2\beta-\frac{1}{2}\sqrt{2})=0$

27. $\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}04$

28. $\sin x\cdot\cos x=-0{,}25\sqrt{3}$

29. $\sin x+\cos x=1{,}5$

30. $1+\cos 2x=\cos x$

31. $\tan 2x=3\cdot\tan x$

32. $\sin 2x=\frac{1}{\tan x}$

33. $\cot x+2\cdot\cos x=0$

34. $\sin^2 x-\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=0$

35. $\frac{1}{\sin 3x-2}=\sin 3x+3$

36. $2\cos x-4\sin x-1=0$

37. $\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos x+2=0$

38. $8\sin^2 x-6\sin x+1=0$

39. $10\sin^2 x-\cos x+3{,}2=0$

40. $\tan x\left[\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\right]=0$

41. $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos 2x=1$

42. $\sin 2x+2\cos^2 x=2$

43. $\cos^2\alpha\cdot\tan 2\alpha-0{,}25\tan 2\alpha=0$

44. $5\sin^2\varphi+3\cos\varphi=-3$

45. $\cos^2 x\cdot\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 2x=0$

46. $2\sin^2 x-3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1=0$

47. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin x=0{,}5$

48. $4\sin^2 x+2(1-\sqrt{3})\cdot\sin x-\sqrt{3}=0$

49. $2\cos^2 x=1+\frac{1}{\tan 2x}$

50. $\tan 2x=\cos x$

51. $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

52. $\frac{1}{\tan^2 x}-4\cos^2 x=-1$

53. $\sin(\varphi+30°)+2\cos\varphi=0{,}5\sqrt{7}$

54. $\tan(\varphi+30°)+\tan(\varphi-30°)=\sqrt{3}$

55. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

56. $\sin(x+2)+2\sin(x-3)-1=0$

57. $\cos(45°+\varphi)+\cos(45°-\varphi)+\cos(90°+\varphi)=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

58. $\sin(\alpha-45°)+\cos(\alpha+135°)=\sqrt{2}\cdot\tan\alpha$

Trigonometrische Gleichungen mit 1 Unbekannten

Lösungen ohne Lösungsweg

Aufg.:

1. $\frac{7}{12}\pi$; $\frac{11}{12}\pi$; $\frac{19}{12}\pi$; $\frac{23}{12}\pi$

2. $\frac{11}{12}\pi$; $\frac{19}{12}\pi$

3. $\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{13}{18}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{25}{18}\pi$; $\frac{11}{16}\pi$

4. 0,4681...; 1,5319...; 2,4681...; 3,5319...; 4,4681...; 5,5319...

5. 0,71216...; 1,3405...; 1,9688...; 2,5971...; 3,2254...; 3,8537...; 4,482...; 5,1104...; 5,7387...;

6. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

7. 0,9045...; 5,3786...;

8. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$

9. 0; π

10. 0; $\frac{\pi}{2}$

11. 1,945...; 4,337...

12. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$

13. 0,29725...; 2,8443...;

14. 0; π; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$

15. 0; 1; π

16. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4}{3}\pi$

17. 1,1071...; 2,0344...; 4,2487...; 5,176...

18. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$; 0,3398...; 2,8017...

Aufg.:

19. $\mathbb{G} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$

20. 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$; π; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

21. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

22. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$

23. $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$

24. $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{8}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{9}{8}\pi$; $\frac{11}{8}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

25. 22,5°; 120°; 157,5°; 202,5°; 300°; 337,5°

26. 22,5°; 157,5°; 202,5°; 240°; 300°; 337,5°

27. 1.077...; 1,278...; 2,648...; 2,849...; 4,219...; 4,420...; 5,789...; 5,991...

28. $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

29. { }

30. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{5}{3}\pi$

31. 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; π; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

32. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$

33. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

34. $\mathbb{G} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$

35. { }

36. 0,23813...; 3,83075...

37. { }

38. 0,25268...; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; 2,88891...

39. { }

40. 0; π

41. 0; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$;

42. 0; $\frac{\pi}{4}$; π; $\frac{5}{4}\pi$

43. 0; 60°; 90°; 120°; 180°; 240°; 270°; 300°

44. 180°

45. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$

46. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5}{6}\pi$

47. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3}{2}\pi$

48. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

49. { }

50. 0,37473...; $\frac{\pi}{2}$; 2,76685...; $\frac{3}{2}\pi$

51. 1,1781...; 2,7489...; 4,3197...; 5,8905...

52. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$

53. 79,1066°; 319,1066°

54. 30°; 100.89°; 210°; 280,89°

55. $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$

56. 3,81315...; 6,1236...

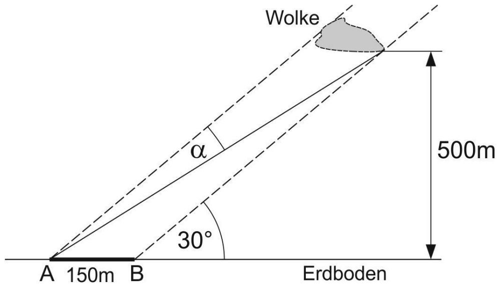
57. 45°; 244,47°...

58. 218,17°; 321,83°

Trigonometrie - Winkelfunktionen sin, cos, tan

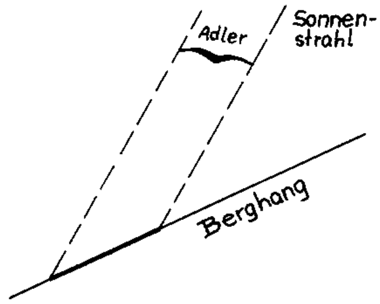
1. Eine Wolke wirft einen $\overline{AB} = 150\,m$ langen Schatten auf den Erdboden.
Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt 30°.

Wie groß ist der Sehwinkel α, unter dem man von A aus die Wolke sieht, wenn diese 500 m über dem Erdboden schwebt?



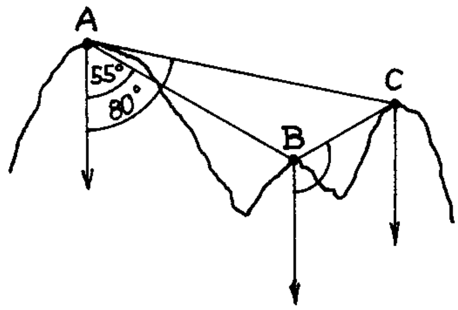
2. Ein Steinadler mit einer Spannweite von $2\,m$ kreist im Aufwind eines Berghanges. Der Adler fliegt gerade mit 10° Neigung gegen die Horizontale, der Berghang ist mit 40°, die Sonnenstrahlen sind mit 60° gegen die Horizontale geneigt.

Berechne die Länge des Schattens die der Steinadler auf dem Hang verursacht.

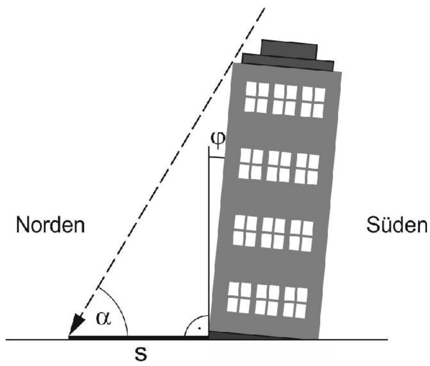


3. Die Berggipfel A (2815 m), B(2408 m) und C(2660 m) und der Erdmittelpunkt liegen in einer Ebene. Von A aus sieht man B unter 55° und C unter 80° gegenüber dem Senklot.

Unter welchem Winkel gegenüber dem Senklot sieht man C von B aus?



4. Der Boden unter einem turmförmigen Gebäude hat sich einseitig gesenkt. Dadurch hat das Bauwerk eine Neigung von φ = 4,45° gegenüber dem Senklot. Die nördliche Seite des Turms ist n = 15,4 m lang.
Wie groß ist die Länge s des Turmschattens, wenn die Sonne im Winkel α = 60° über der Erde im Süden steht?



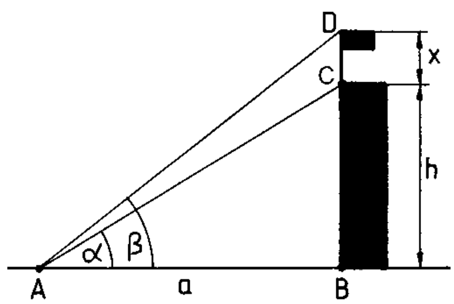
5. Auf einem Turm ist eine Fahnenstange befestigt. Um die Höhe der Stange zu berechnen wurden folgende Werte gemessen:

$\overline{AB} = a = 68\,m$

α = 38,3°; β = 39,8°

Gib eine Gleichung für die Höhe x der Fahnenstange in Abhängigkeit von a, α und β an.

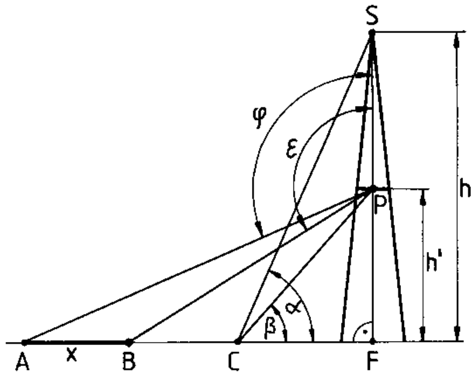
Berechne die Höhe mit den gegebenen Werten.



Trigonometrie - Winkelfunktionen sin, cos, tan

6. Zur Ermittlung der Breite $\overline{AB} = x$ eines Flusses werden auf der Plattform P eines Turmes die Zenitwinkel φ = 110° und ε = 125° gemessen. Da die Höhe des Turmes vom Fußpunkt F bis zur Spitze S mit h = 42 m, nicht aber seine bis zur Plattform P gemessene Höhe h' bekannt ist, mißt man im Hilfspunkt C die Höhenwinkel α = 68° und β = 55°.

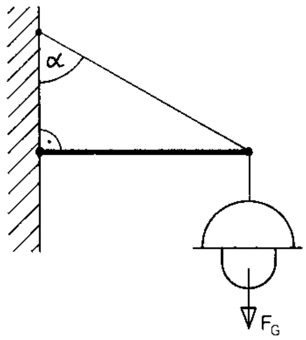
Berechne die Breite x des Flusses.



7. Eine Lampe hängt am freien Ende einer Stange. Das andere Stangenende ist im Mauerwerk befestigt. Die Stange ist durch ein Seil abgestützt. Die Gewichtskraft der Lampe beträgt 16,2 N, der Winkel α ist 48°.

Berechne die auftretende Zugkraft F_Z im Seil, sowie die Druckkraft F_D in der Stange.

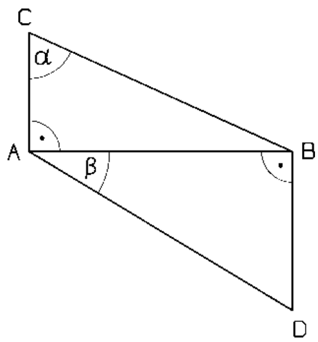
Fertige eine Skizze der Kraftpfeile an.



8. Gegeben sind in nebenstehender Skizze:

α = 75,12°; β = 41°36' ; [AC] = 2,5 cm

Berechne die Länge von [AD] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.



9. Die beiden Antennen eines Senders stehen auf einer gemeinsamen Horizontalebene und sind e = 234 m voneinander entfernt.
Ein Beobachter B steht zwischen den Masten und zwar a = 85 m vom niedrigeren entfernt. Von dort aus sieht er die Spitze P der höheren Antenne unter einem Erhebungswinkel von α = 61°28' und die Spitze Q der niedrigeren Antenne unter einem Erhebungswinkel von β = 48,6°. Die Augenhöhe des Betrachters ist 1,70 m.

Fertige eine Skizze mit allen Angaben an.

Berechne die beiden Masthöhen.

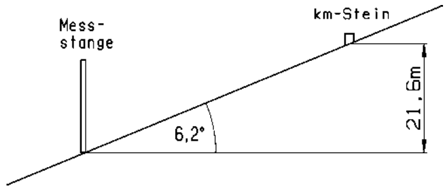
Zwischen den Antennenspitzen P und Q ist ein Drahtseil straff gespannt.
Unter welchem Erhebungswinkel verläuft es?

10. a) Die 6 cm lange Diagonale eines Rechtecks teilt den 90°- Winkel im Verhältnis 3:7.
Wie lang sind die Rechteckseiten?

b) Die parallelen Seiten eines gleichschenkligen Trapezes messen 6 cm und 3 cm, die anderen beiden Seiten sind 5 cm lang.
Berechne die Winkel des Vierecks auf 1' genau.

Trigonometrie - Winkelfunktionen sin, cos, tan

11. An einer geradlinig ansteigenden Straße steht ein km-Stein. Es soll auf der Straße eine Messstange so gesetzt werden, daß zwischen ihrem Fußpunkt und dem km-Stein ein Höhenunterschied von 21,6 m besteht. In welcher Entfernung vom km-Stein muß die Stange gesetzt werden, wenn der Neigungswinkel der Straße zu 6,2° gemessen wurde?



12. a) Wie lang ist die Sehne in einem Kreis mit r = 4,75 cm, welche zum Mittelpunkts-winkel $\alpha = 73{,}5°$ gehört?

b) In einem Kreis mit r = 4 cm ist eine Sehne s = 4,3 cm Länge eingezeichnet. Wie lang ist der zugehörige Bogen?

c) Auf einem Kreis mit r = 55 mm ist ein Bogenstück der Länge 20 mm abgegrenzt. Um wie viel Meter ist die Sehne kürzer als der Bogen?

13. a) Einem Kreis, dessen Radius die Länge r hat, ist ein regelmäßiges n - Eck einbeschrieben. Berechne die Länge seiner Seite und den Flächeninhalt für r = 5,5 cm; n = 15.

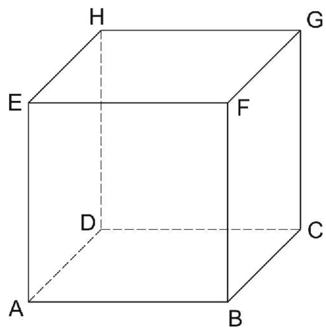
b) Wie lang ist die Seite eines regelmäßigen 24-Ecks vom Flächeninhalt 1 m^2 ?

14. a) Beweise: Der Flächeninhalt A eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

b) Wie groß ist der Inhalt eines Dreiecks mit $\alpha = 75{,}5°$, c = 8,55 cm, b = 6,25 cm?

c) Berechne den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel 5,5 cm lang sind und dessen Winkel an der Spitze 135° misst.

15. Berechne in einem Würfel ABCDEFGH den Winkel, der zwischen der Raumdiagonalen [EC] und der Flächendiagonalen [AC] auftritt.

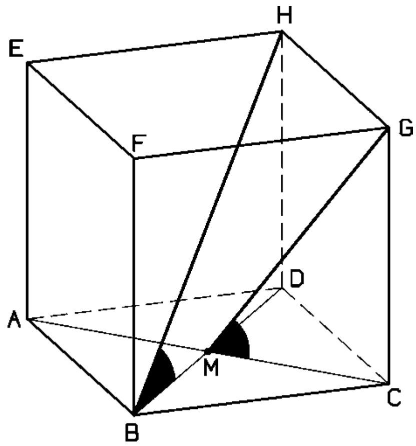


16. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Die Länge der Seitenkanten ist ebenfalls a. Berechne den Neigungswinkel einer Seitenkante, sowie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche ! (auf 1‘ genau)

17. Berechne den Neigungswinkel einer Kante des regelmäßigen Tetraeders gegen eine Seitenfläche sowie den Winkel, den zwei Seitenflächen miteinander bilden. (auf 1‘ genau)

Trigonometrie - Winkelfunktionen sin, cos, tan

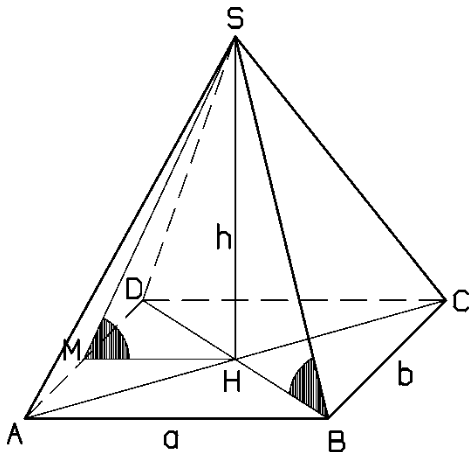
18. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Quadrat. Die Höhe der Pyramide ist 8 cm, ihr Volumen 384 cm^3.
Unter welchem Winkel ist eine Seitenfläche gegen die Grundfläche geneigt? (auf 1‘ genau)



19.0 Nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild eines Würfels mit der Kantenlänge a.

19.1 Berechne das Maß des Winkels HBD (Neigungswinkel einer Raumdiagonalen gegen die Grundfläche).

19.2 Berechne das Maß des Neigungswinkels CMG gegen die Grundfläche ABCD.



20.0 Nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild einer geraden Pyramide ABCDS mit einem Rechteck ABCD als Grundfläche.

20.1 Berechne jeweils das Maß des Winkels SBH (Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche) und das Maß des Winkels HMS (Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche) für a, b und h:

a) a = 8 cm; b = 5 cm; h = 10 cm

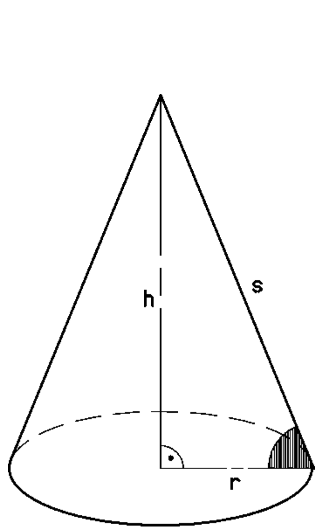
b) a = 15,5 cm; b = 6,8 cm; h = 9,7 cm

c) a = b = 6 cm; h = 11 cm

d) a = 2b; h = 3b

20.2 Berechne h und das Pyramidenvolumen V für a = 12 cm, b = 5 cm und $\sphericalangle SBH = 75°$.

20.3 Berechne a und b für h = 9 cm, b = a - 6 cm und $\sphericalangle SBH = 60°$.



21.0 Nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r, der Höhe h und der Mantellinie s.

21.1 Berechne das Maß α des Neigungswinkels einer Mantellinie gegen die Grundfläche für r = 5 cm und h = 12 cm .

21.2 Berechne h, s, das Kegelvolumen V und den Kegelmantel M für r = 6 cm und $\alpha = 60°$.

21.3 Wie groß sind r, h und s für $\alpha = 75°$ und Kegelvolumen V = 240 cm^3 ?

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

1. Berechne die nicht gegebenen Seitenlängen im Dreieck ABC:

a) $\beta = 32°$ $\gamma = 87°$ $c = 8{,}5$ dm

b) $\alpha = 102{,}7°$ $\beta = 46{,}2°$ $c = 67$ mm

c) $\alpha = 38{,}6°$ $\gamma = 44{,}5°$ $b = 10{,}4$ cm

2. Zwei Beobachter auf Leuchttürmen, die 2,3 km voneinander entfernt sind, sehen dasselbe Schiff. Der erste Beobachter misst den Winkel zwischen der Verbindungslinie der Leuchttürme und dem Schiff mit 47°. Der Beobachter auf dem anderen Leuchtturm misst gleichzeitig den Winkel zwischen der Verbindungslinie zum Schiff und der zum ersten Leuchtturm mit 110°. Wie weit ist das Schiff von jedem Leuchtturm entfernt ?

3. Drei Orte A, B , C bilden ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 2{,}840\text{ km}$, $\overline{BC} = 5{,}450\text{ km}$ und $\overline{AC} = 3{,}020\text{ km}$. Die Ortschaften B und C sollen von A aus ferngeheizt werden.
Unter welchem Winkel muss in A mit der Rohrverlegung begonnen werden ?

4. Von einem Parallelogramm ABCD sind gegeben: $\overline{AB} = 6{,}8\text{ cm}$, $\sphericalangle CBA = 120°$, $\overline{AC} = 9{,}6\text{ cm}$. Bestimme $\overline{BC}$.

5. Eine Grundseite eines gleichschenkligen Trapezes ist 100 mm lang. Eine Diagonale misst 93 mm. Außerdem beträgt das Maß der beiden Winkel an der gegebenen Grundseite je 65°.
Berechne die Längen der Schenkel und die Länge der zweiten Grundseite.

6. Ein Trapez ABCD mit a = 10 cm, b = 8 cm, $\alpha = 75°$ und $\beta = 35°$ ist gegeben.
Berechne die Längen der anderen Trapezseiten.
Hinweis: Zeichne durch C eine Parallele zu [AD].

7. Von einem Parallelogramm ABCD sind $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{AD} = 4{,}4\text{ cm}$, $\alpha = 25°$ gegeben.
Berechne die Längen der beiden Diagonalen.

8. Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes S vom Standort P zu bestimmen, steckt man von P aus eine Standlinie [PQ] ab und misst $\sphericalangle QPS$ und $\sphericalangle SQP$.
Berechne $\overline{PS}$ für $\overline{PQ} = 200\text{ m}$, $\sphericalangle QPS = 55{,}5°$ und $\sphericalangle SQP = 79{,}4°$.

9. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2/1)$, $B(8/3)$, $C(5/6)$.
Berechne die Seitenlängen des Dreiecks. Berechne die Maße der Dreieckswinkel.

10. In einem Kreis mit r = 6 cm werden zwei Sehnen [AB] mit $\overline{AB} = 3{,}5\text{ cm}$ und [AC] mit $\overline{AC} = 5\text{ cm}$ gezeichnet. Berechne die Länge der Sehne [BC] (zwei Möglichkeiten).
Hinweis: Berechne zuerst das Maß des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

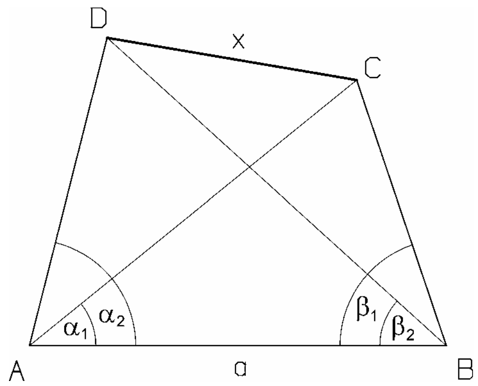
Klasse 10

11. Um die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte A und B zu bestimmen, wählt man auf der Verlängerung von [AB] einen Punkt C und legt eine Standlinie [CD] fest, wobei $D \notin AB$. Man misst $\sphericalangle DCA$, $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle BDC$.
Berechne $\overline{AB}$ für $\overline{CD} = 135\,\text{m}$, $\sphericalangle DCA = 52{,}3°$, $\sphericalangle ADC = 85{,}6°$, $\sphericalangle BDC = 26{,}2°$.

12. An einer Straßenkreuzung liegt ein Grundstück ABCD, dessen Straßenfrontlängen $\overline{AB} = 65{,}8\,\text{m}$ und $\overline{AD} = 46\,\text{m}$ betragen. Die Grenzlinien an den Straßen schneiden sich unter einem Winkel mit dem Maß $\alpha = 112{,}53°$. Man ermittelte von B und von D aus die Winkel zum vierten Punkt C mit $\sphericalangle CBA = 86{,}43°$ und $\sphericalangle ADC = 75{,}45°$.
Welchen Flächeninhalt hat das Grundstück ?

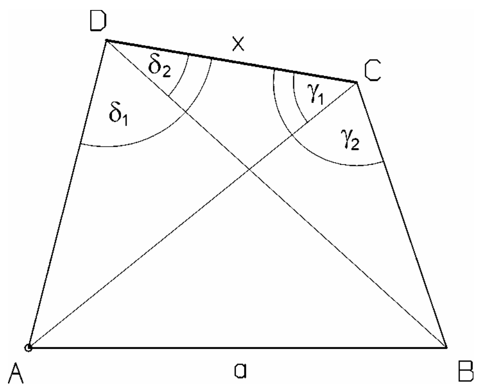
13. Das **Vorwärtseinschneiden** aus zwei Punkten:
Die Länge einer unzugänglichen Strecke [CD] soll bestimmt werden. Man wählt eine messbare Strecke mit der Länge $\overline{AB} = a$ (Standlinie) und misst α_1, α_2, β_1 und β_2.

Bestimme $\overline{CD}$, wenn gegeben sind:
$a = 115\text{ m}$ $\alpha_1 = 39{,}7°$ $\alpha_2 = 74{,}0°$
$\beta_1 = 60{,}0°$ $\beta_2 = 30{,}2°$



14. Das **Rückwärtseinschneiden** nach zwei Punkten:
Von den Endpunkten der nicht direkt messbaren Strecke [CD] werden zwei Punkte, deren Entfernung a beträgt, anvisiert.
Es werden die Winkelmaße γ_1, γ_2, δ_1 und δ_2, sowie die Länge der Strecke [AB] gemessen.

Um $\overline{CD}$ zu bestimmen, berechne zunächst a in Abhängigkeit von x und löse anschließend nach x auf.
$a = 710\text{ m}$ $\gamma_1 = 52{,}5°$ $\gamma_2 = 114{,}2°$
$\delta_1 = 86{,}7°$ $\delta_2 = 35{,}1°$



15. Von den beiden Beobachtungsstationen A und B, die 5,4 km voneinander entfernt sind, wird ein Schiff S angepeilt, das genau Kurs auf A hält. Man misst $\sphericalangle BAS_1 = 34{,}53°$, $\sphericalangle S_1BA = 116{,}58°$. Nach einer Viertelstunde misst man $\sphericalangle S_2BA = 78{,}23°$. S_1 bezeichnet die erste, S_2 die spätere Position des Schiffes. Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Schiff ?

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

16. Die Entfernung zwischen zwei in Küstennähe vor Anker liegenden Schiffen X und Y soll vom Land aus ermittelt werden. Man steckt am Strand eine 400 m lange Standlinie [AB] ab und misst in A und B die Winkel zwischen den Visierlinien zu den Schiffen und der Standlinie. Man erhält folgende Werte:
$\sphericalangle BAX = 90°$; $\sphericalangle BAY = 30°$; $\sphericalangle XBA = 56{,}31°$ und $\sphericalangle YBA = 132{,}99°$.
Wie weit sind die beiden Schiffe voneinander entfernt ?

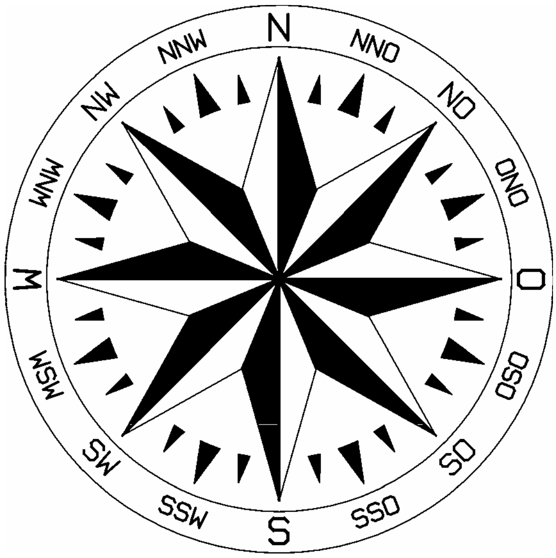
17. In einem Wald liegen drei Förstereien A, B und C. Von A aus führt jeweils ein 4,8 km langer gerader Weg nach B und ein 5,7 km langer Weg nach C. Beide Wege bilden einen Winkel von 99°. B und C sollen nun durch einen geradlinigen Waldweg verbunden werden. Wie lang wird dieser und unter welchem Winkel muss in B bzw. C mit dem Bau begonnen werden ?

18.0 Von A aus fährt ein Schiff auf NW-Kurs mit einer Geschwindigkeit von 24 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde). Ein zweites Schiff verlässt A 20 Minuten später in Richtung SSW mit 22 Knoten Geschwindigkeit.

18.1 Wie weit sind beide Schiffe eine Stunde nach Abfahrt des zweiten Schiffes voneinander entfernt (Entfernungsangaben in Seemeilen) ?

18.2 Zum gleichen Zeitpunkt wird vom ersten Schiff aus das zweite angepeilt. Wie groß ist der Winkel zwischen Peilrichtung und der Nord-Südlinie ?

Windrose



Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

Erstelle zu jeder der folgenden Aufgaben zuerst eine maßstäbliche Zeichnung.

1. Berechne die Länge der nicht gegebenen Dreiecksseite im Dreieck ABC:

a) b = 6,7 cm c = 5,9 cm α = 63,5°
b) b = 2,6 cm c = 3,5 cm α = 147,5°
c) a = 4,6 cm b = 7,0 cm γ = 123°
d) a = 9,5 cm c = 6,4 cm β = 33°

2. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße sowie den Umkreisdurchmesser d und die Dreiecksfläche folgender Dreiecke ABC:

a) b = 6,2 cm; c = 5,5 cm; β = 42,4°
b) a = 7,5 cm; c = 4,8 cm; α = 62°20'
c) b = 41,2 m; c = 96,4 m; γ = 112°15'
d) c = 14,5 cm; α = 30°45'; β = 87°50'
e) a = 35,7 cm; α = 44,6°; γ = 105,8°
f) b = 17,8 cm; α = 122,4°; β = 34°25'
g) a = 40,5 cm; b = 64,6 cm; α = 30°50'
h) b = 8,4 cm; c = 24,3 cm; β = 57,4°
i) a = b = 14,2 cm; β = 52,8°
k) a = 27,8 cm; α = 72°14'; γ = 35°32'
l) d = 22,2 cm; a = 12,6 cm; c = 8,5 cm
m) d = 14,7 cm; b = 9,4 cm; γ = 56°24'

3. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße der Dreiecke ABC:

a) b = 14 cm; c = 18 cm; γ = 36,4°
b) a = 6,5 cm; c = 13,4 cm; γ = 112,5°
c) a = 17,5 cm; b = 39,3 cm; α = 64,3°
d) a = 22,5 cm; b = 43,8 cm; α = 152,4°
e) a = 78,2 cm; b = 21,8 cm; β = 38°50'
f) a = 21,5 cm; b = 28,5 cm; α = 35°
g) b = 22 cm; c = 22 cm; β = 154,5°
h) a = 42 cm; c = 105 cm; α = 62,2°
i) a = c = 14,5 cm; γ = 90°
k) b = c = 14,4 cm; γ = 124,5°
l) a = 25,6 cm; b = 40,8 cm; α = 28°15'
m) a = 18,7 cm; c = 24,8 cm; α = 90°
n) a = 2,5b; c = 18 cm; α = 73,5°
o) a = b = 13,5 cm; γ = 72,4°

4. Durch einen Berg wird ein Tunnel gebaut. Von einem bestimmten Ort aus sieht man die Stellen des Tunneleingangs und –ausgangs. Vom Standpunkt bis zum einen Ende des Tunnels sind es 2,7 km, bis zum anderen Ende 3,5 km. Das Maß des Winkels zwischen den beiden gemessenen Strecken beträgt 28°.

Wie lang ist der Tunnel ? (Der Tunnel wird als geradlinig angenommen.)

5. Ein Schiff wird mit der Eigengeschwindigkeit $6\frac{m}{s}$ nach Norden gesteuert. Eine Strömung der Geschwindigkeit $1\frac{m}{s}$ in Richtung NO drängt das Schiff vom Steuerkurs ab. Bestimme die tatsächliche Geschwindigkeit des Schiffes.

6. Zwei Kräfte von 168 N und 232 N greifen am gleichen Angriffspunkt an und bilden miteinander einen Winkel von 113°. Berechne die Ersatzkraft.

7. Berechne die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABC:

a) a = 3,5 cm b = 4,7 cm c = 4,3 cm
b) a = 6,35 m b = 5,78 m c = 10,50 m
c) a = 86 mm b = 50 mm c = 61 mm

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

8. Ein dreieckiges Grundstück hat die Seitenlängen 100m, 73 m und 121,5 m. Berechne die Maße der Winkel in den Grundstücksecken.

9. Eine dreieckige Verkehrsinsel hat die Seitenlängen 12,8 m, 6,3 m und 14,7 m. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks ?

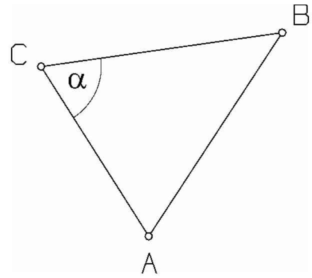
10. Von einem Dreieck ist bekannt, dass ein Winkel 34,5° und ein anderer 52,2° misst. Dem Winkel von 34,5° liegt eine 10,8 cm lange Seite gegenüber.

Wie lang ist die längste Dreiecksseite ?

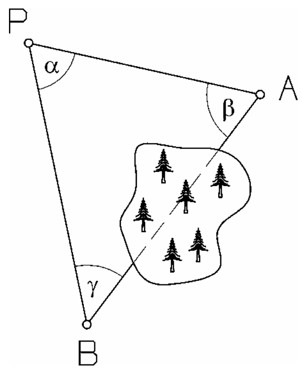
11. Zwei Winkel eines Dreiecks messen 72°15' und 66°40'.

Wie lang ist die kürzeste Dreiecksseite, wenn die dem Winkel von 72°15' gegenüberliegende Seite 28,5 cm lang ist ?

12. Die Länge der Strecke [AB] kann nicht direkt gemessen werden.
Berechne die Streckenlänge $\overline{AB}$, wenn folgende Messdaten vorliegen:
$\overline{AC} = 1{,}8\text{ km}$; $\overline{CB} = 1{,}6\text{ km}$ und α = 32,4°



13.0 Zwischen den Orten A und B soll ein Kabel geradlinig verlegt werden.
Zwischen A und B besteht durch einen Wald keine Sichtverbindung, wohl aber von einem Punkt P aus. A und B werden von P aus anvisiert, wobei ein Winkel mit dem Maß 43° festgestellt wird.
Ferner liegen folgende Messdaten vor:
$\overline{PA} = 2{,}365\text{ km}$ und $\overline{PB} = 3{,}876\text{ km}$.



13.1 Berechne die Länge des Kabels !

13.2 Bestimme die Winkelmaße β und γ !

14.0 Drei Ortschaften liegen am Rand eines Naherholungsgebietes. Von den drei vermessenen Punkten A, B und C aus sollen drei geradlinig verlaufende Straßen zu einem Parkplatz P gebaut werden, der von den Orten A, B und C jeweils gleich weit entfernt sein soll.

Die Messung ergab: $\overline{AB} = 11{,}500\text{ km}$; $\overline{AC} = 12{,}400\text{ km}$; $\overline{BC} = 9{,}900\text{ km}$

14.1 Berechne das Maß des Winkels $\sphericalangle CBA$!

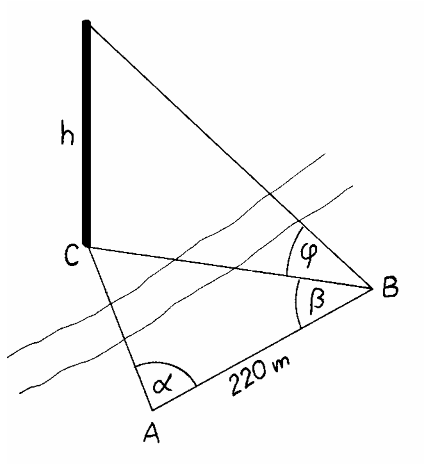
14.2 Wie weit ist der Parkplatz von jedem der drei Orte entfernt ?

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

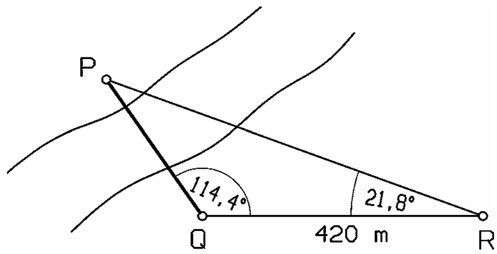
15. Über einen Fluss hinweg soll die Höhe eines Fabrikschlotes ermittelt werden. Dazu wird in gleicher Höhe mit dem Fußpunkt C des Schlotes eine 220 m lange Standlinie [AB] abgesteckt. Die Messung des Winkels α, den [AB] und [AC] einschließen, und des Winkels β, den [BC] und [AB] einschließen, ergibt $\alpha = 44{,}5°$ und $\beta = 56{,}2°$. Als Erhebungswinkel von B aus zur Spitze des Fabrikschlotes erhält man $\varphi = 34{,}8°$.

Wie hoch ist der Schlot ?



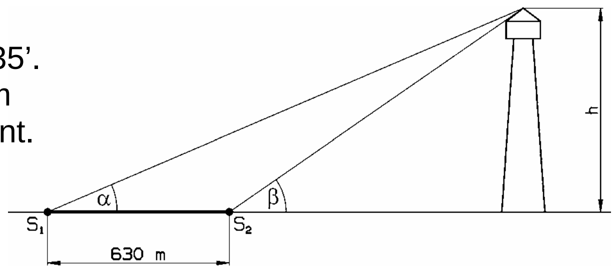
16. Um die Entfernung zweier auf verschiedenen Seiten eines Flusses liegender Punkte P und Q berechnen zu können steckt man eine Standlinie [QR] auf einer Seite des Flusses ab, visiert den Punkt P von Q und R aus an und misst die Winkel, die die Visierlinien mit [QR] bilden.

Berechne mit den angegebenen Messwerten die Länge $\overline{PQ}$.



17.0 Von einem Schiff S_1 aus sieht man die Spitze eines Leuchtturmes unter einem Erhebungswinkel von $\alpha = 4°6'$ und von einem Schiff S_2 aus unter einem Erhebungswinkel von $\beta = 14°35'$. Beide Schiffe befinden sich genau westlich vom Leuchtturm und sind 630 m voneinander entfernt.

17.1 Zeige, dass für die Höhe h des Leuchtturms $h = \overline{S_1S_2} \cdot \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ gilt, und berechne h.



17.2 Wie weit sind die Schiffe S_1 und S_2 vom Leuchtturm entfernt ?

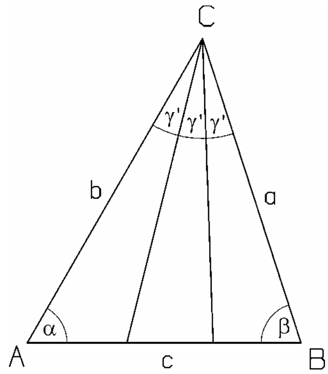
18. Ein Flugzeug wird von zwei 40 km voneinander entfernten Beobachtungsstationen B_1 und B_2 unter einem Ergebungswinkel von 22,7° bzw. 48,5° angepeilt, als es gerade senkrecht über der Verbindungslinie von B_1 und B_2 fliegt.

Welche Flughöhe hat das Flugzeug ?

19. Von einem Dreieck ABC sind b = 8,4 cm, $\gamma = 65°$ und $\alpha : \beta = 2 : 3$ gegeben. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße des Dreiecks sowie die Länge der Winkelhalbierenden w_β und den Abstand des Schnittpunktes P der Mittelsenkrechten zu [AB] mit der Winkelhalbierenden w_β von den Seiten a, b und c.

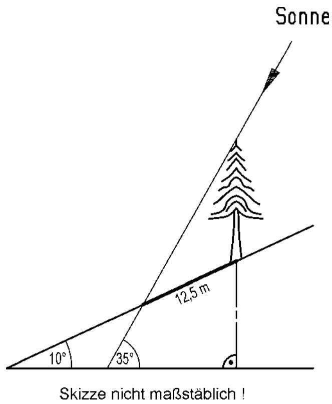
Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10



20. In einem Dreieck mit α = 60°, β = 72° und b = 16,4 cm soll die kürzeste Seite so in drei Teile geteilt werden, dass die Verbindungslinien der Teilpunkte mit dem gegenüberliegenden Dreieckseckpunkt den der kürzesten Seite gegenüberliegenden Winkel in drei maßgleiche Teile teilen.

Berechne die Seitenlängen und die Flächeninhalte der Teildreiecke.



21. Ein Baum steht auf einem Hang, der um 10° gegenüber der Waagrechten geneigt ist. Zu einem Zeitpunkt, zu dem der Schatten des Baumes genau in der Falllinie verläuft, wird die Schattenlänge mit 12,50 m und die Sonnenhöhe mit 35° gemessen.

Wie hoch ist der Baum ?

22. Durch einen Berg soll ein Tunnel getrieben werden. Die beiden Tunneleinfahrten A und B liegen in gleicher Höhe, ihre geradlinige Verbindung ist 14,264 km lang. Der Vortrieb erfolgt von A und B aus gleichzeitig und gleich schnell. Von A aus steigt die Tunnelröhre um 3,8°, von B aus um 6,8° gegenüber der Verbindungslinie von A und B an.

Wo wird die Verbindung hergestellt ?

Wie hoch liegt der höchste Punkt der Tunnelröhre über der Verbindungslinie von A und B, und wie lang ist die Tunneldurchfahrt ?

23. Zur Ermittlung der Entfernung zweier unzugänglicher Punkte P und Q im Gelände wird auf der Verlängerung von [PQ] ein Messpunkt A festgelegt und von A aus eine 163 m lange Standlinie [AB] abgesteckt. Folgende Winkel werden gemessen:
$\sphericalangle BAQ = 54°25'$; $\sphericalangle PBA = 86°15'$; $\sphericalangle QBA = 24°22'$.
Berechne $\overline{PQ}$ auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

24.0 Zwei Schiffe A und B sind 8,85 km voneinander entfernt. Das Schiff A fährt mit einer Geschwindigkeit von $42\frac{km}{h}$. Seine Fahrtrichtung schließt mit der Verbindungsstrecke [AB] zum Zeitpunkt der Entfernungsmessung einen Winkel von 75,5° ein.

24.1 Welchen Winkel muss die Fahrtrichtung des Schiffes B bei einer Geschwindigkeit von $56\frac{km}{h}$ mit [AB] einschließen, damit es mit dem Schiff A zusammentrifft ?

Wie lange fährt das Schiff B bis zum Treffpunkt ?

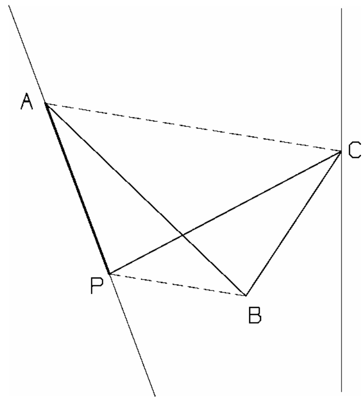
24.2 Mit welcher Geschwindigkeit müsste das Schiff B fahren, um mit dem Schiff A zusammenzutreffen, wenn seine Fahrtrichtung mit [AB] einen Winkel von 60° einschließt ?

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

24.3 Mit welcher kleinsten Geschwindigkeit kann das Schiff B das Schiff A noch erreichen ? Welchen Winkel muss in diesem Fall seine Fahrtrichtung mit [AB] einschließen ?

25. Die Grenzlinie von A über B nach C zwischen zwei Grundstücken soll so begradigt werden, dass sich die Grundstücksgrößen nicht ändern. Damit die neue Grenzlinie [PC] gezogen werden kann, muss $\overline{AP}$ berechnet werden.
Folgende Messwerte sind bekannt:
$\overline{AB} = 356{,}4\ \text{m}$; $\overline{BC} = 192{,}5\ \text{m}$;
$\sphericalangle ACB = 44°12'$; $\sphericalangle PAB = 72°36'$.



26. Im Dreieck ABC gilt $\beta = 45°$. M ist der Mittelpunkt der Seite b. Der Winkel BMC misst ebenfalls 45°. Berechne α und γ.
Anleitung: Begründe, dass die Dreiecke ABC und MBC ähnlich sind und somit $b = a\sqrt{2}$ gilt.
Berechne anschließend α mit Hilfe des Sinussatzes.

27. Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 7{,}5\ \text{cm}$, $\overline{BC} = 7\ \text{cm}$, $\overline{CD} = 5\ \text{cm}$ und $\overline{DA} = 4\ \text{cm}$. Die Diagonale [AC] halbiert den Innenwinkel $\sphericalangle BAD$!
Hinweis: Planfigur; spiegle ΔABC an AC. Betrachte Dreieck $\Delta B'CD$.
Berechne das Maß des Innenwinkels $\sphericalangle ADC$!

28.0 Gegeben sind zwei Kreise $k_1(M_1(-2/2);\ 4{,}5)$ und $k_2(M_2(4/3);\ 3{,}5)$.

28.1 Berechne die Streckenlänge $\overline{M_1M_2}$, erstelle vorher eine Zeichnung !

28.2 Berechne den Umfang der den beiden Kreisen gemeinsamen linsenförmigen Fläche !

29.0 Von einem Ortsteil C aus verlaufen zwei geradlinige Kanalrohre zu den Punkten A und B des geradlinigen Hauptkanals.
Die Rohre haben folgende Längen: $\overline{AC} = 3{,}4\ \text{km}$; $\overline{BC} = 7{,}1\ \text{km}$ und $\overline{AB} = 4{,}5\ \text{km}$.
Von C aus soll ein weiteres geradliniges Kanalrohr verlegt werden, das den Hauptkanal genau in der Mitte zwischen A und B trifft:

29.1 Zeichne das Dreieck ABC und die Strecke [MC]. Für die Zeichnung gilt: $1\ \text{km} \mathrel{\hat{=}} 1\ \text{cm}$

29.2 Berechne die Länge des neuen Kanalrohrs !

29.3 Zeige durch Rechnung, dass der neue Anschluss der Länge $\overline{MC}$ nicht auf einem alten Kanalrohr liegt, das früher längs der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ verlegt wurde.

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

30.0 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm.
Verlängert man die Diagonale [AC] gleichzeitig über A und C hinaus um x cm, so entstehen Punkte A_x und C_x. Die Vierecke A_xBC_xD sind dann Parallelogramme.

30.1 Erstelle eine Zeichnung für x = 2

30.2 Berechne das Maß α des Winkels $\sphericalangle BAC$!

30.3 Berechne das Maß β des Winkels $\sphericalangle CAD$!

30.4 Berechne die Streckenlänge $\overline{A_xB} = a$ cm in Abhängigkeit von x !

30.5 Berechne die Streckenlänge $\overline{A_xD} = b$ cm in Abhängigkeit von x !

30.6 Berechne das Maß γ des Innenwinkels $\sphericalangle BA_xD$ der Parallelogramme A_xBC_xD in Abhängigkeit von x !

30.7 Berechne das Innenwinkelmaß γ im Intervall $x \in [0;\ 6]$ in Schritten $\Delta x = 0{,}5$ und zeichne ein x-γ-Diagramm !

31.0 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm.
Verkürzt man die Diagonale [AC] gleichzeitig von A und C aus um x cm, so entstehen Punkte A_x und C_x. Die Vierecke A_xBC_xD sind dann Parallelogramme.

31.1 Zeichne das Rechteck ABCD mit einem Parallelogramm A_xBC_xD für x = 1,5 !

31.2 Berechne die Streckenlänge $\overline{A_xB} = a$ cm und $\overline{A_xD} = b$ cm in Abhängigkeit von x !

31.3 Berechne das Maß α des Winkels $\sphericalangle BA_xD$ in Abhängigkeit von x !

31.4 Lege eine Wertetabelle für x und α an, und zeichne ein x-α-Diagramm ! $x \in [0;\ 4[$ in Schritten von $\Delta x = 0{,}5$

31.5 Berechne den Flächeninhalt A der Parallelogramme A_xBC_xD in Abhängigkeit von x !

32.0 Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm und $\sphericalangle BAD = 60°$.
Trägt man auf den Parallelogrammseiten von den Ecken aus entgegen dem Uhrzeigersinn Strecken der Länge x cm ab, so entstehen neue Parallelogramme EFGH für $x \in [0;\ 5]$. Es gilt: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$ cm.
Zeichne ein neues Parallelogramm EFGH für x = 2 ein !

32.1 Berechne die Streckenlängen $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$ in Abhängigkeit von x !
Für welche Werte für x werden diese Streckenlängen minimal ?
Gib die minimalen Streckenlängen an !

32.2 Der Winkel $\sphericalangle BEF$ hat das Maß α. Berechne $\overline{EF}$ in Abhängigkeit von x und α !
Berechne α für die minimale Länge von $\overline{EF}$!

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

33.0 Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 3a\text{ cm}$ und $\overline{BC} = 2a\text{ cm}$ für a = 2 und $\sphericalangle BAD = 60°$.
Verlängert man die Parallelogrammseiten entgegen dem Uhrzeigersinn über die Eckpunkte hinaus um jeweils x cm, so entstehen neue Parallelogramme EFGH, wobei gilt: $\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DG} = \overline{AH} = x\text{ cm}$.
Zeichne für x = 3 ein neues Parallelogramm EFGH ein !

33.1 Berechne die Streckenlängen $\overline{HE}$ und $\overline{EF}$ in Abhängigkeit von x und a.
($\overline{HE} = y\text{ cm}$; $\overline{EF} = z\text{ cm}$)

33.2 Berechne für x = 3,5 das Maß der Winkel $\sphericalangle AEH$ und $\sphericalangle BFE$ bei a = 2.

34.0 Von einem Dreieck ABC sind bekannt:
$\overline{BC} = a$; $\overline{AC} = 4a$; $\sphericalangle CBA = 120°$

34.1 Berechne die Seitenlänge $\overline{AB} = c$ in Abhängigkeit von a !

34.2 Berechne das Maß der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACB$!

34.3 Lässt man das Dreieck ABC um die Gerade AC rotieren, so entsteht ein Doppelkegel. Berechne den Radius r des Doppelkegels in Abhängigkeit von a !

34.4 Berechne die Kegelhöhe h_1 und h_2 in Abhängigkeit von a, und bestimme sodann das Volumen V des Doppelkegels in Abhängigkeit von a !

35.0 Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 2x\text{ cm}$, $\overline{BC} = x\text{ cm}$ und $\sphericalangle BAD = \alpha$ mit $\alpha \in]0°;\ 180°[$.

35.1 Zeichne für x = 4 und α = 60° das Parallelogramm ABCD.
(Platzbedarf: Ganze DIN A4 - Seite)

35.2 Zeichne über den Parallelogrammseiten nach außen Quadrate und bestimme deren Diagonalenschnittpunkte. Verbindet man diese Diagonalenschnittpunkte der Reihe nach, so entsteht wieder ein Quadrat $M_1M_2M_3M_4$ mit $\overline{M_1M_2} = y\text{ cm}$.

35.3 Berechne die Länge der Quadratseite $[M_1M_2]$ in Abhängigkeit von x und α !

35.4 Bestimme den Flächeninhalt der neuen Quadrate in Abhängigkeit von x und α !

35.5 Tabellarisiere den Term A(x; α) für x = 4 in Schritten von $\Delta\alpha = 10°$ im Intervall]0°;180°[!
Zeichne ein α-A-Diagramm und entnimm ihm das Winkelmaß α*, für das A maximal wird !

35.6 Bestätige den Extremwert algebraisch !

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

36.0 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A(0/0)$ und $B(6/0)$.
Verlängert man die Dreiecksseiten entgegen dem Uhrzeigersinn über die Eckpunkte hinaus um z LE, so entstehen neue gleichseitige Dreiecke EFG, wobei gilt:
$\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AG} = z\ \ \text{LE}$.

36.1 Zeichne das Dreieck ABC und ein neues Dreieck EFG für z = 2,5 in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \le x \le 9$; $-4 \le y \le 10$

36.2 Gib die Koordinaten des Punktes C an !

36.3 Berechne die Koordinaten von G in Abhängigkeit von z !

36.4 Berechne die neue Dreiecksseitenlänge s in Abhängigkeit von z !

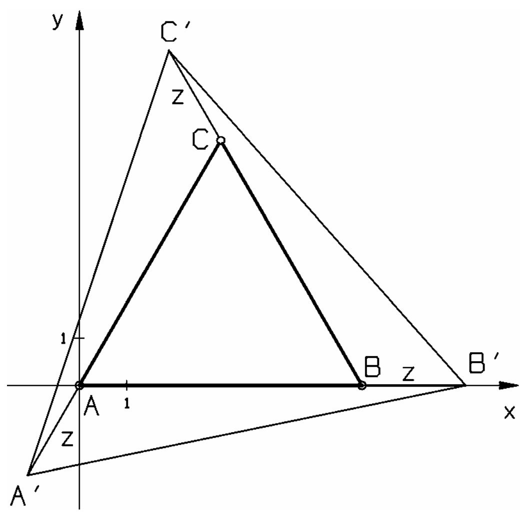
36.5 Das Lot von G auf die x-Achse ergibt den Lotfußpunkt G_0. Der Winkel $\sphericalangle AEG$ hat das Maß φ. Berechne den Term $\cos\varphi$ in Abhängigkeit von z !

36.6 Lege für z und φ eine Wertetabelle an mit $z \in [0;\, 4]$ in Schritten $\Delta z = 0{,}5$, und zeichne sodann ein z-φ-Diagramm !

36.7 Berechne im Dreieck EG_0G den Term $\tan\varphi$ in Abhängigkeit von z !
Begründe, warum φ stets kleiner als 45° ist !

37.1 Zeichne das Dreieck ABC mit A(0/0), B(6/0) und $C(3/3\sqrt{3})$ in ein Koordinatensystem, und begründe durch Rechnung, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

37.2 Verlängert man die Seiten des Dreiecks ABC um jeweils z cm, so erhält man wieder ein gleichseitiges Dreieck A'B'C'.
Begründe diese Behauptung.
Ermittle z sodann so, dass der Winkel B'A'A im Dreieck A'B'C' 45° misst, und berechne den Umfang, den Flächeninhalt und die Koordinaten der Eckpunkte dieses Dreiecks.



38.0 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a cm. Trägt man von den Ecken aus auf den Dreiecksseiten entgegen dem Uhrzeigersinn Strecken der Länge x cm ab, so entstehen neue gleichseitige Dreiecke DEF mit der Seitenlänge s cm.
($\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = x\ \ \text{cm}$ mit $x \in\,]0;\, a[$)

38.1 Zeichne für a = 6 das Dreieck ABC und ein neues Dreieck DEF für x = 2 !

38.2 Berechne die Seitenlänge s cm in Abhängigkeit von x und a !

38.3 Für welchen Wert für x wird s minimal ? Gib den minimalen Wert für s an !

38.4 Der Winkel $\sphericalangle BDE$ hat das Maß φ. Berechne φ für den Fall aus 38.3 !

Trigonometrie - Sinussatz, Kosinussatz

Klasse 10

38.5 Berechne die Seitenlänge s cm in Abhängigkeit von a und φ ! Gib die Grenzen für φ an ! Berechne anschließend den Flächeninhalt der neuen gleichseitigen Dreiecke DEF in Abhängigkeit von a und φ!

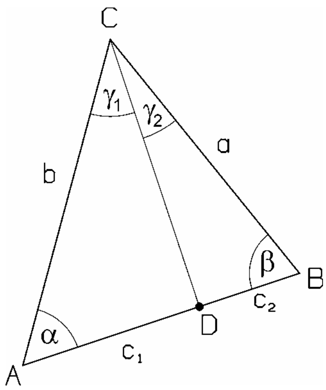
38.6 Tabellarisiere den Term für den Flächeninhalt aus 38.5 im erlaubten Intervall in Schritten $\Delta\varphi = 10°$ für a = 6 ! Zeichne ein φ - A - Diagramm !

38.7 Für welche Werte für φ wird die neue Seitenlänge 4 cm lang ? (a = 6 cm)

39. Die Eckpunkte B und C des Dreiecks ABC mit $A(0/0)$ liegen auf der Geraden mit y = - 2x + 10. Die Seite [AB] schließt mit der x-Achse einen Winkel von 20° ein. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte B und C, α, β, γ, a und c sowie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn $\overline{AC} = 7\,\text{LE}$ gilt.

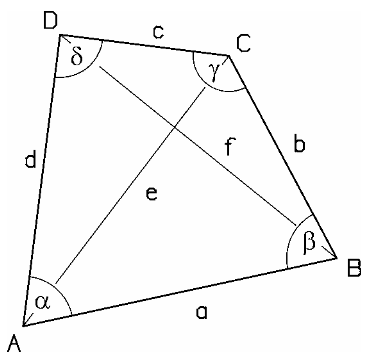
40. Von einem Dreieck ABC, dessen Eckpunkte B und C auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 6$ liegen, ist weiter bekannt: $A(0/0)$, c = 10 LE, α = 42°.
Berechne die Koordinaten von B und C, die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße sowie die Dreiecksfläche.

41. Zeige, dass im Dreieck ABC $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b \cdot \sin\gamma_1}{a \cdot \sin\gamma_2}$ gilt.
Begründe damit, dass die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels die dem Winkel gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der dem Winkel anliegenden Seiten teilt.



42. Von Vierecken ABCD sind folgende Maße bekannt.
Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße.
Anleitung: Durch die Diagonalen e und f werden die Vierecke ABCD in Teildreiecke zerlegt, deren fehlende Maße berechnet werden können.

a)	a = 6,5 cm;	e = 8,4 cm;	α = 64,6°;	β = 84,8°;	γ = 71,5°
b)	b = 62,4 cm;	c = 44,8 cm;	e = 52,6 cm;	β = 38,5°;	δ = 44,6°
c)	a = 68,5 m;	c = 125,4 m;	f = 132,1 m;	α = 92,7°;	γ = 148,4°
d)	a = 128,5 m;	b = 85,8 m;	f = 214 m;	α = 86°25';	γ = 55°12'



Trigonometrie - Anwendung der Winkelfunktionen

Klasse 10

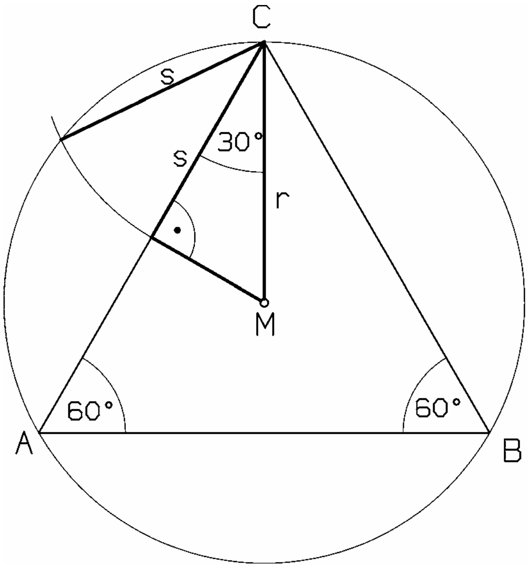
1.1 Ein reguläres 12-Eck hat einen Umkreisradius von 8 cm. Berechne die Seitenlänge.

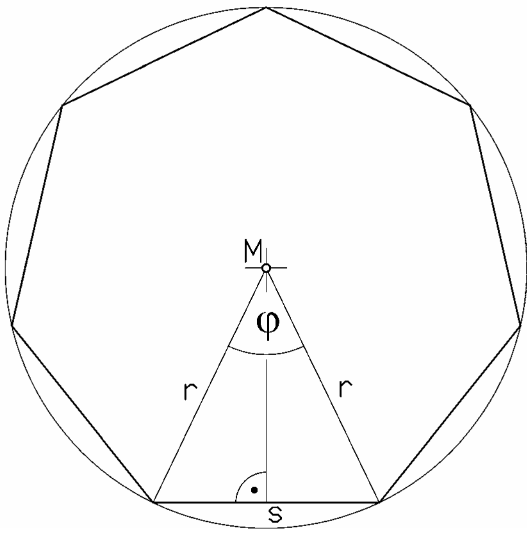
1.2 Welchen Flächeninhalt hat der Inkreis dieses Zwölfecks ?

2. Albrecht Dürer (1471-1528) gibt für die Konstruktion der Seite eines regulären Siebenecks die in nachfolgender Zeichnung (linkes Bild) dargestellte Möglichkeit an.

Berechne, um wie viel Prozent dieser Näherungswert von der tatsächlichen Länge abweicht.

Lösungshinweis: Verwende für die Berechnung den Umkreisradius 10 cm.





3. Im Dreieck ABC hat die Seite c die Länge 8,3 cm, die Seite b ist 7,5 cm lang, der Winkel α misst 50°.

Berechne die Länge der Seite a.

Hinweis: Fertige eine Planfigur, fälle von C aus das Lot auf [AB], und berechne sodann die Höhe h_c.

4. Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC hat 24 cm Umfang, und der Innenwinkel BAC misst 72°.

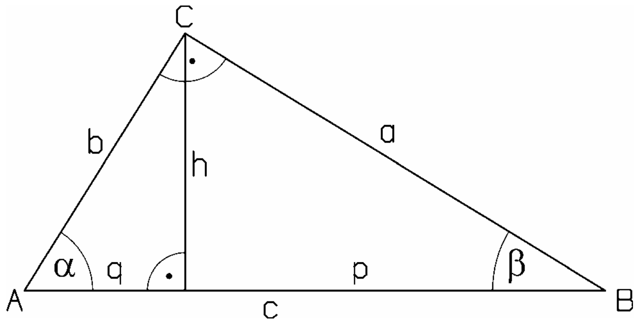
Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC ?

Trigonometrie - Anwendung der Winkelfunktionen

Klasse 10

5.0 Im folgenden stehen die Variablen für Seitenlängen und Winkelmaße rechtwinkliger Dreiecke ABC, die wie das Dreieck ABC in nachstehender Skizze bezeichnet sind.

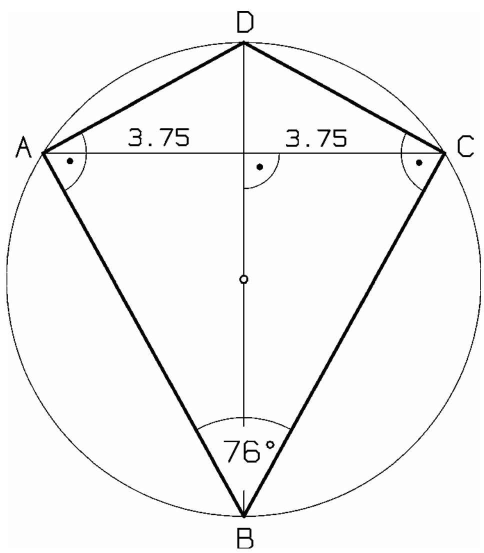
Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelmaße.



	a	**b**	**c**	α	β	**h**	**q**	**p**
a)	8 cm	6cm	?	?	?	?	?	?
b)	12,4 cm	?	?	70°	?	?	?	
c)	?	7,5 cm	?	60°	?	?	?	?
d)	?	?	?	?	35°	6,2 cm	?	?
e)	?	?	?	?	?	4 cm	3 cm	?
f)	?	?	?	?	?	?	2,8 cm	6,2 cm
g)	?	?	10 cm	?	?	4 cm	?	?

6. Ein bei den Eckpunkten A und C rechtwinkliges Drachenviereck hat eine 7,5 cm lange Diagonale [AC]. Der Innenwinkel CBA misst 76°.

Berechne die Länge der Diagonale [BD] und die Seitenlängen des Drachenvierecks.



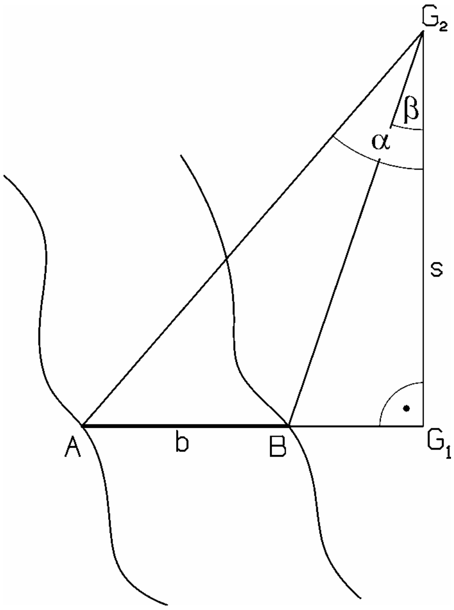
Trigonometrie - Anwendung der Winkelfunktionen

Klasse 10

7. Um die Breite b eines Flusses zwischen A und B zu bestimmen kann man wie folgt vorgehen: Man legt zwei Messpunkte G_1 und G_2 fest, so dass A, B und G_1 in einer geraden Linie liegen und gleichzeitig $\sphericalangle G_2G_1B = 90°$ gilt.

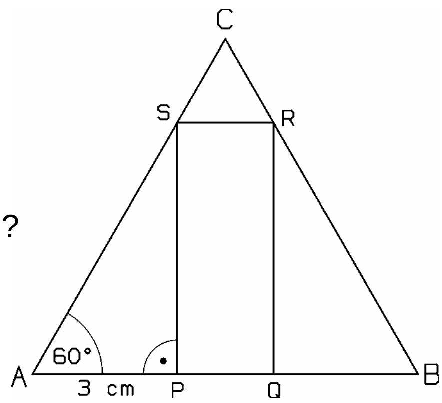
Man misst nun $s = \overline{G_1G_2}$ sowie die Winkel AG_2G_1 (α) und BG_2G_1 (β), und kann dann b errechnen.

Berechne b aus folgenden Messergebnissen:
s = 150 m; α = 78°; β = 71°.



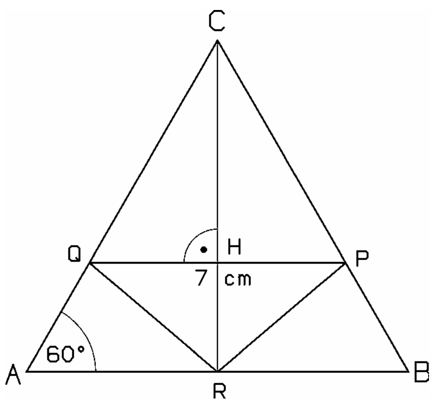
8.1 Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 8\text{ cm}$ wird ein Rechteck PQRS einbeschrieben, so dass $\overline{AP} = 3\text{ cm}$ gilt.

Wie lang sind die Seiten und wie groß ist der Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks PQRS ?



8.2 Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 12\text{ cm}$ wird ein Dreieck PQR einbeschrieben, so dass $\overline{PQ} = 7\text{ cm}$ gilt.

Berechne den Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks PQR und die Schenkellänge $\overline{QR}$.



Trigonometrie - Anwendung der Winkelfunktionen

Klasse 10

9.0 Von einer Raute ABCD ist bekannt, daß ihre Diagonale [AC] doppelt so lang wie die Diagonale [BD] ist. Der Flächeninhalt beträgt 15,21 cm^2.

9.1 Berechne die Längen der beiden Diagonalen sowie die Seitenlänge der Raute.

9.2 Wie groß sind die Innenwinkel der Raute ?

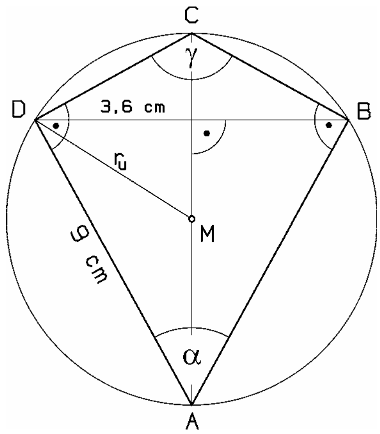
9.3 Berechne den Flächeninhalt des Inkreises.

10.0 In einer Raute beträgt ein Innenwinkel 100° und der Inkreisradius ρ = 6 cm.

10.1 Berechne die Längen der Diagonalen und die Seitenlänge der Raute.

10.2 Wie groß ist der Umkreisradius eines Quadrates, das den gleichen Flächeninhalt wie die Raute hat ?

11.0 Ein rechtwinkliger Drachen entsprechend der nebenstehenden Skizze hat eine 9 cm lange Seite [AD] und eine 7,2 cm lange Diagonale [BD].



11.1 Berechne die Maße der Innenwinkel und die Länge der Seite [BC].

11.2 Welchen Flächeninhalt hat der Umkreis dieses Drachenvierecks ?

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

1.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.
Zur Grundfläche ABCD parallele Ebenen schneiden die Würfelkanten [AE] in A',
[BF] in B', [CG] in C' und [DH] in D'. Mit dem Diagonalenschnittpunkt S der Grundfläche ABCD bilden diese Punkte Pyramiden A'B'C'D'S.
Der Winkel $\sphericalangle AA'S$ hat das Maß φ.

1.1 Zeichne den Würfel im Schrägbild mit einer Pyramide !
Für die Zeichnung: a = 6; ω = 45°; q = 0,5; Rissachse CD.
Bezeichne den Winkel mit dem Maß φ !

1.2 Berechne die Länge der Pyramidenkante [A'S] in Abhängigkeit von a und φ !
Gib die Grenzen für φ an !

1.3 Berechne die Pyramidenhöhe $\overline{SS_0} = h\,\text{cm}$ in Abhängigkeit von a und φ !

1.4 Die Pyramidenhöhe ist h cm. Für welche Werte für φ gilt: $\frac{a}{2} \le h \le \frac{2}{3}a$?

1.5 Berechne das Volumen der Pyramide A'B'C'D'S in Abhängigkeit von a und φ !

1.6 Für welchen Wert für φ nimmt das Volumen den Wert $\frac{a^3}{6}\sqrt{2}\ \text{cm}^3$ an ?

2.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche eines Würfels mit der Deckfläche EFGH, wobei E über A, F über B usw. liegen.
Eine Ebene ACQP mit $P \in [EF]$ und $Q \in [FG]$ schneidet aus dem Würfel gleichschenklige Trapeze ACQP aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche ABCD hat das Maß α.

2.1 Zeichne das Schrägbild des Würfels mit einem Trapez; bezeichne den Winkel mit dem Maß α !
Für die Zeichnung: a = 5; ω = 45°; $q = 0,5$; Rissachse CD.

2.2 Bestimme die Grenzen von α und berechne die Trapezhöhe h = x cm in Abhängigkeit von a und α !

2.3 Berechne die Seitenlänge $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von a und α !

2.4 Für welchen Wert für α nimmt die Streckenlänge $\overline{PQ}$ den Wert $\frac{a}{2}\sqrt{2}\text{cm}$ an ?

2.5 Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze ACQP in Abhängigkeit von a und α !

2.6 Tabellarisiere den Term für den Flächeninhalt im erlaubten Intervall in Schritten von $\Delta\alpha = 5°$ für a = 6 und zeichne den Graph !

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

3.0 Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $h = a\sqrt{3}$ cm. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke [AD].
Eine Ebene APQD mit $P \in [BS]$ und $Q \in [CS]$ schneidet aus der Pyramide gleichschenklige Trapeze APQD aus. Der Neigungswinkel zwischen Trapez und Grundfläche hat das Maß φ.

3.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCDS und ein Trapez APQD.
Bezeichne den Winkel mit dem Maß φ !
Für die Zeichnung: a = 6; ω = 45°; $q = 0{,}5$; Rissachse CD.

3.2 Bestimme die Grenzen für φ. Berechne die Trapezhöhe h* = x cm in Abhängigkeit von a und φ !

3.3 Für welche Werte für φ gilt: $\frac{3}{4}a \le x \le a\sqrt{2}$?

3.4 Der Punkt R ist Mittelpunkt der Strecke [PQ]. Berechne die Streckenlänge $\overline{SR} = y$ cm in Abhängigkeit von a und φ !

3.5 Für welche Werte für φ wird die Streckenlänge $\overline{SR} \le a$ cm ?

3.6 Berechne die Streckenlänge $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von a und φ !

3.7 Berechne den Flächeninhalt A der Trapeze APQD in Abhängigkeit von a und φ !

3.8 Tabellarisiere den Term für A im erlaubten Intervall in Schritten von $\Delta\varphi = 10°$ für a = 6 !
Zeichne den zugehörigen Graph !

4.0 Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ cm ist die Grundfläche einer Pyramide ABCS. Die Spitze S liegt senkrecht über C, und es gilt $\overline{CS} = 8$ cm.
Von A aus werden auf [AB] Strecken [AP], von B aus auf [BS] Strecken [BQ] und von S aus auf [SC] Strecken [SR] mit $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{SR} = x$ cm abgetragen ($x \in \mathbb{R}^+$).
Die Punkte P, Q und R sind Eckpunkte von Dreiecken PQR.

4.1 Zeichne ein Schrägbild der Pyramide ABCS mit dem Dreieck PQR für x = 3 mit ω = 60° und q = $1:2$. Die Kante [BC] soll dabei auf der Schrägbildachse liegen.

4.2 Für welchen Wert von x gilt $\overline{PQ} = 6$ cm ?
Berechne für diesen Fall $\overline{QR}$ und $\overline{PR}$ und die Innenwinkelmaße des Dreiecks PQR.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

5.0 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{CA} = \overline{CB}$ ist Grundfläche einer Pyramide ABCS, deren Höhe 8 cm lang ist. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche ABC. M ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6\text{ cm}$. Die Strecke [CM] ist 5 cm lang. Dreht man eine Ebene um AB, so erhält man als Schnittfiguren mit der Pyramide ABCS Dreiecke ABZ mit $Z \in [CS]$, die die Pyramide ABCS in die Teilpyramiden ABCZ und ABSZ zerlegen. Der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einem Schnittdreieck hat das Maß φ.

5.1 Zeichne das Schrägbild der Pyramide ABCS mit einem Schnittdreieck ABZ, wobei die Symmetrieachse CM des Dreiecks ABC die Rissachse ist.
Für die Zeichnung: $q = 0{,}5$; $\omega = 45°$

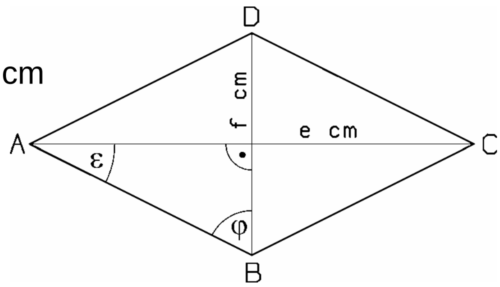
5.2 Für welche Werte von φ erhält man Schnittdreiecke ?

5.3 Stelle $\overline{ZM}$ und den Flächeninhalt A der Schnittdreiecke ABZ in Abhängigkeit von φ dar. Für welchen Wert von φ erhält man das flächenkleinste Schnittdreieck ABZ ?

$$\left(\text{Teilergebnis}: A = \frac{13{,}85}{\sin(67{,}4° + \varphi)}\text{cm}^2\right)$$

5.4 Für welches Winkelmaß φ_0 wird die gegebene Pyramide ABCS von der Ebene durch AB in zwei volumengleiche Pyramiden ABCZ und ABSZ zerlegt ?
Berechne das Winkelmaß φ_0.

6.0 In Rauten ABCD mit der Seitenlänge a sind die Diagonalen [AC] mit $\overline{AC} = e\text{ cm}$ und [BD] mit $\overline{BD} = f\text{ cm}$ zusammen 18 cm lang.
Für das Maß ε von $\sphericalangle BAC$ gilt $0° < \varepsilon < 90°$.



6.1 Zeige durch Rechnung, dass unter den Rauten ABCD das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ die kürzeste Seite a_0 und damit den kleinsten Umfang besitzt.

6.2 Berechne ε, so dass die Seite a der zugehörigen Raute ABCD 8 cm lang ist.

6.3 Begründe, dass $4{,}5\sqrt{2}\text{ cm} \le a < 9\text{ cm}$ gilt.

6.4 Zeige, dass die Raute $A_0B_0C_0D_0$ mit dem kleinsten Umfang den größten Flächeninhalt besitzt.

$$\left(\text{Teilergebnis}: A_{ABCD} = \frac{81 \cdot \sin 2\varepsilon}{1 + \sin 2\varepsilon}\text{cm}^2\right)$$

6.5 Berechne ε, so dass $A_{ABCD} = 30\text{ cm}^2$ erfüllt ist.

6.6 Die Rauten ABCD rotieren um die Achse BD und erzeugen dabei Doppelkegel als Rotationskörper. Weise für das Volumen V_1 der Doppelkegel nach:

$$V_1(\varepsilon) = 486\pi \cdot \frac{\tan\varepsilon}{(\tan\varepsilon + 1)^3}\text{cm}^3.$$

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

6.7 Stelle zu V_1 eine Wertetabelle auf mit $\Delta\varepsilon = 10°$ und zeichne den Graph für das Volumen gemäß 6.6.
(ε-Achse: 1 cm für 10°; V-Achse: 1cm für 20 cm^3).

6.8 Dem Diagramm zu 6.7 ist zu entnehmen, dass etwa mit 27° für ε der Doppelkegel mit dem größten Volumen entsteht. Bestätige 26° < ε < 28° mit dem Taschenrechner, und bestimme dann durch Intervallschachtelung ε auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

6.9 Bei Rotation der Rauten ABCD um die Achse AC entstehen ebenfalls Doppelkegel. Zeige, dass für das Volumen V_2 dieser Doppelkegel gilt: $V_2 = V_1 \cdot \tan\varepsilon$.

6.10 Zeige durch Rechnung, dass $V_2(90°-\varepsilon) = V_1(\varepsilon)$ gilt. Mit welchem Wert für ε nimmt daher V_2 einen maximalen Wert an ? Wann gilt $V_2 = V_1$?

7.0 Eine Menge von geraden Kreiskegeln ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Kegel gleichlange Mantellinien s haben, die aber von Kegel zu Kegel verschiedene Neigungswinkel α mit der Grundfläche einschließen. Jeder Kegel enthält eine Inkugel.

7.1 Zeichne vom Kegel mit s = 6 cm und α = 50° eine Schnittfigur, die die Kegelhöhe enthält !

7.2 Stelle das Volumen V(s; α) der Kegel, den Radius $r_K(s; \alpha)$ der Inkugeln und die Mantelfläche $A_M(s; \alpha)$ der Kegel in Abhängigkeit von s und α dar !

7.3 Begründe algebraisch, dass es im Intervall 0°< α < 90° keine Kegel mit extremer Mantelfläche gibt !

7.4 Tabellarisiere für s = 6 cm jeweils V(6 cm; α) und r_K(6 cm; α) im Intervall $0° \le \alpha \le 90°$ in Schritten $\Delta\alpha = 10°$.

8.0 Ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert um [AB] als Achse: Es entsteht ein Doppelkegel.
Der Winkel $\sphericalangle BAC$ hat das Maß α, der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist r und ist zugleich Radius der Kugel, die dem Doppelkegel umbeschrieben ist.

8.1 Fertige eine Zeichnung des Axialschnitts mit r = 5 cm und α = 30° an.

8.2 Das Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn aus der Kugel der Doppelkegel herausgenommen wird, ist abhängig von r und α.
Bestimme V(r;α).

$$\left(\text{Ergebnis}: V(r;\alpha) = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \left(2 - \sin^2 2\alpha\right)\right)$$

8.3 Bestimme algebraisch das Winkelmaß α^*, für das V(r;α) aus Aufgabe 8.2 möglichst klein ist.

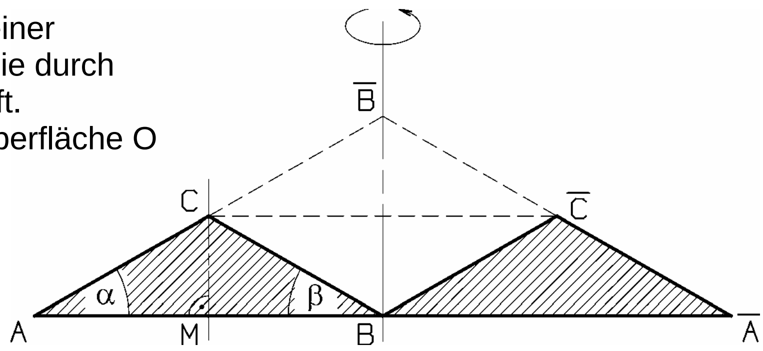
8.4 Für welche Werte für α wird für r = 5 cm das Volumen gleich $100 \cdot \pi\ cm^3$?

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

9.1 Das gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 4\text{cm}$ und $\alpha = \beta = 30°$ rotiert um eine zu seiner Symmetrieachse parallelen Achse, die durch den Eckpunkt B des Dreiecks verläuft. Berechne das Volumen V und die Oberfläche O des Rotationskörpers.

(Teilergebnis: $O = 324{,}9\text{ cm}^2$)



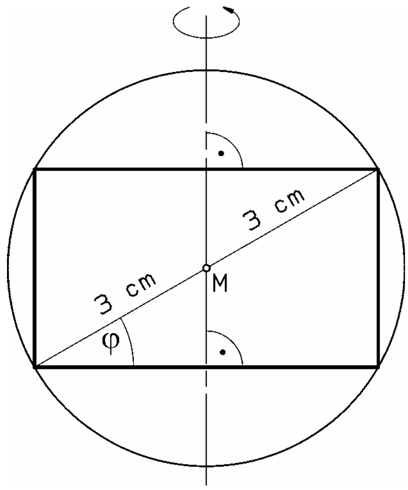
9.2 Stelle das Volumen $V(\alpha)$ und die Oberfläche $O(\alpha)$ der Rotationskörper in Abhängigkeit vom variablen Winkelmaß α dar.

$\left(\text{Teilergebnis}: O(\alpha) = 64\pi\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha\right)\text{cm}^2\right)$

9.3 Für welches Winkelmaß α beträgt die Oberfläche des Rotationskörpers $80\pi\text{ cm}^2$?

9.4 Berechne das größte mögliche Volumen der Rotationskörper. Welche Oberfläche besitzt der Rotationskörper mit dem größten Volumen ?

10.1 Einem Kreis mit dem Radius r = 3 cm werden Rechtecke einbeschrieben. Stelle den Umfang $u(\varphi)$ in Abhängigkeit vom Maß φ des Winkels dar, den die Rechtecksdiagonale mit einer Rechtecksseite einschließt, und prüfe durch Rechnung, ob man dem Kreis ein Rechteck mit einem Umfang von 14 cm einbeschreiben kann.



10.2 Wenn der Umfang am größten ist, ist auch das Quadrat des Umfangs $u^2(\varphi) = 144(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)\text{ cm}^2$ am größten. Zeige damit, dass $u(\varphi) = 12\sqrt{1+\sin 2\varphi}$ cm gilt, und gib den größten möglichen Umfang u_{max} an.

10.3 Lässt man nun den Kreis mit den einbeschriebenen Rechtecken um die Achse a rotieren, so erhält man Zylinder, die einer Kugel einbeschrieben sind. Welcher Zylinder besitzt die größte Mantelfläche ? Berechne φ für diesen Fall.

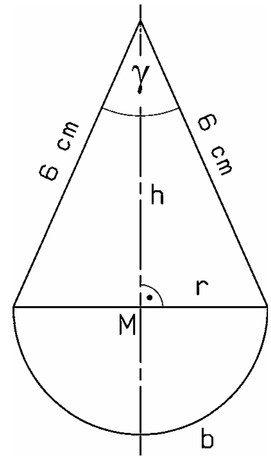
10.4 Stelle das Volumen $V(\varphi)$ der Zylinder in Abhängigkeit von φ dar, und ermittle das größte mögliche Zylindervolumen.

10.5 Zeige, dass man als Oberfläche der Zylinder $O(\varphi) = 18\pi(\cos^2\varphi + \sin 2\varphi)\text{ cm}^2$ erhält. Zeichne den Graphen der Funktion mit $y = \cos^2\varphi + \sin 2\varphi$ für $0° \le \varphi \le 90°$, und ermittle dann φ für den Zylinder mit der größten Oberfläche auf ein Stelle nach dem Komma gerundet mit Hilfe einer Intervallschachtelung. Berechne sodann O_{max}.

(Teilergebnis: $\varphi = 31{,}7°$)

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I



11.0 Die gegebene Figur ist aus einem gleichschenkligen Dreieck und einem Halbkreis zusammengesetzt. Die 6 cm langen Schenkel schließen den Winkel mit dem Maß γ ein.

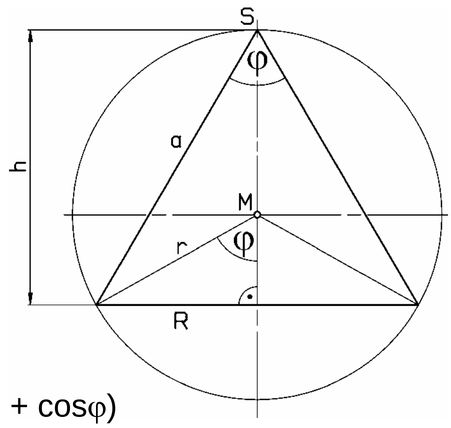
11.1 Für welches Maß γ ist der Halbkreisbogen 12 cm lang ?

11.2 Berechne γ so, dass das gleichschenklige Dreieck und der Halbkreis denselben Flächeninhalt besitzen.

11.3 Zeige, dass man $A(\gamma) = 9(2\sin\gamma - \pi\cos\gamma + \pi)\ \text{cm}^2$ als Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur erhält.
Für welchen Wert von γ beträgt der Flächeninhalt $36\pi\ \text{cm}^2$?

11.4 Lässt man die Gesamtfigur um ihre Symmetrieachse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper, der aus einem Kegel und einer Halbkugel zusammengesetzt ist. Zeige, dass man $O(\gamma) = 36\pi\left(\sin\frac{\gamma}{2} + 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\text{cm}^2$ als Oberfläche erhält. Berechne sodann γ, so dass die Oberfläche $45\pi\ \text{cm}^2$ beträgt.

11.5 Stelle das Volumen $V(\gamma)$ der Rotationskörper in Abhängigkeit von γ dar, und tabellarisiere $V(\gamma)$ für $100° \le \gamma \le 180°$ in Schritten $\Delta\gamma = 10°$.
Zeichne den Graphen für $V(\gamma)$ in ein Koordinatensystem und entnimm diesem γ für den Rotationskörper mit dem größten Volumen.



12.0 Einer Kugel mit dem Radius r = 5 cm werden gerade Kreiskegel einbeschrieben, deren gemeinsame Spitze S ein Punkt der Kugeloberfläche ist.
Zwei gegenüberliegende Mantellinien eines Kegels schließen den Öffnungswinkel mit dem Maß φ ein.
Das nebenstehende Bild zeigt einen Axialschnitt.

12.1 Zeige, dass man $V(\varphi) = \frac{125\pi}{3} \cdot \sin^2\varphi\,(1 + \cos\varphi)\ \text{cm}^3$ als Volumen der Kegel in Abhängigkeit von φ erhält.

12.2 Tabellarisiere die Funktion mit der Gleichung $y = \sin^2\varphi\ (1 + \cos\varphi)$ für $0° \le \varphi \le 100°$ in Schritten $\Delta\varphi = 10°$, und zeichne den Graphen.
Ermittle sodann φ für den größten Funktionswert durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet, und berechne damit V_{max}.
(Teilergebnis: $V_{max} = 155{,}1\ \text{cm}^3$)

12.3 Zeige, dass man $A(\varphi) = 25 \cdot \sqrt{2}\pi \cdot \sin\varphi\,\sqrt{1 + \cos\varphi}\ \text{cm}^2$ als Mantelfläche der Kegel erhält.
Begründe mit Hilfe des Ergebnisses von 12.1, dass der Kegel mit dem größten Volumen auch die größte Mantelfläche besitzt.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

12.4 Für welches Winkelmaß φ erhält man einen Kegel, dessen Mantelfläche doppelt so groß ist wie seine Grundfläche ?

$$2\cdot\sin^2\varphi=\sqrt{2}\cdot\sin\varphi\sqrt{1+\cos\varphi}\quad |:\sin\varphi\qquad(\sin\varphi\neq 0)$$

Lösungshinweis: $\Rightarrow\ 2\cdot\sin\varphi=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\varphi}\quad |^2$

$$\Rightarrow\ 4\cdot\sin^2\varphi=2(1+\cos\varphi)...$$

13.0 Einer Kugel mit dem Radius r = x cm werden Kegel einbeschrieben.
Der Winkel an der Spitze des Achsenschnittdreiecks von den Kegeln hat das Maß γ.

13.1 Zeichne einen Axialschnitt von Kugel und Kegel für x = 4,5 und γ = 45° !

13.2 Berechne den Kegelradius r_{Ke} = z cm in Abhängigkeit von x und γ ! (Nicht $\frac{\gamma}{2}$!)

13.3 Berechne die Kegelhöhe h = y cm in Abhängigkeit von x und γ ! (Nicht $\frac{\gamma}{2}$!)

13.4 Gib die Grenzen für γ an ! Für welchen Wert für γ wird die Kegelhöhe gleich $\frac{x}{2}$cm ?

13.5 Für welchen Wert für γ wird die Kegelhöhe gleich $\frac{7}{4}x$ cm ?

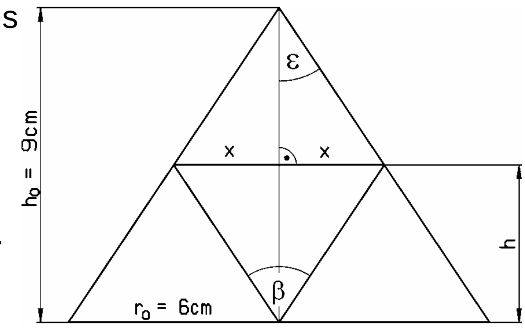
13.6 Die Mantellinien sind s = u cm lang. Berechne s in Abhängigkeit von x und γ !

13.7 Für welche Werte für γ wir die Mantellinie gleich x, gleich $x\sqrt{2}$ cm und größer als $\frac{3}{2}x$ cm ?

13.8 Berechne das Volumen V der Kegel in Abhängigkeit von x und γ !

13.9 Tabellarisiere den Volumenterm für x = 6 im Intervall [0°; 180°] in Schritten $\Delta\gamma=15°$!
Zeichne ein γ-V-Diagramm !
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $1\,\text{cm}\mathrel{\hat{=}}15°$; $1\,\text{cm}\mathrel{\hat{=}}30\,\text{cm}^3$

14.0 Einem geraden Kreiskegel mit dem Grundkreisradius r_0 = 6 cm und der Höhe h_0 = 9 cm werden auf der Spitze stehende gerade Kreiskegel einbeschrieben. Die Spitzen aller einbeschriebenen Kegel fallen mit dem Höhenfußpunkt des ursprünglichen Kegels zusammen. Der Öffnungswinkel eines einbeschriebenen Kegels hat das Maß β, der Grundkreisradius misst x cm und die Höhe h cm.



14.1 Stelle h, x und das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von β dar.

$$\left(\text{Teilergebnis}: V(\beta)=72\pi\frac{\tan^2\frac{\beta}{2}}{\left(\tan\frac{\beta}{2}+\frac{2}{3}\right)^3}\text{cm}^3\right)$$

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen Raumgeometrie Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

14.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{\tan^2 \frac{\beta}{2}}{\left(\tan\frac{\beta}{2} + \frac{2}{3}\right)^3}$ für $0° \le \beta \le 180°$. Berechne β_0 für den größten Funktionswert $f(\beta_0)$ durch Intervallschachtelung auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und schließlich damit V_{max}.

14.3 Stelle das Volumen der einbeschriebenen Kegel in Abhängigkeit von x dar.

$$\left(\text{Ergebnis}: V(x) = \frac{\pi}{2} x^2 (6 - x)\ \text{cm}^3\right)$$

14.4 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = x^2(6 - x)$ für $0 \le x \le 6$. Dem Graph kann man entnehmen, dass vermutlich $f(4 + d) \le f(4)$ für $d \in [0; 6]$ gilt. Weise dies durch Rechnung nach.

15.1 Geraden Kreiskegeln mit dem Öffnungswinkel φ und 8 cm langen Mantellinien werden Kugeln einbeschrieben. Stelle den Kugelradius ρ in Abhängigkeit von φ dar.

$$\left(\text{Ergebnis}: \rho = \frac{4 \sin\varphi}{1 + \sin\frac{\varphi}{2}}\ \text{cm}\right)$$

15.2 Zeichne den Graphen für die Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{4\sin\varphi}{1 + \sin\frac{\varphi}{2}}$ für $0° \le \varphi \le 90°$.

Entnimm dem Graphen φ_0 für den größten Funktionswert $f(\varphi_0)$, und ermittle φ_0 durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet. Berechne mit diesem Wert die Oberfläche der größten Inkugel und die Oberfläche des zugehörigen Kegels.

15.3 Begründe durch Rechnung, dass es keinen Kegel gibt, dessen Mantelfläche gleich der Oberfläche seiner Inkugel ist.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen ebene Flächen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

1.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$, $B(10/0)$, $P(-2/4)$ und $Q(8/4)$.
C liegt auf [PQ]. Das Maß des Winkels ACB sei γ.

1.1 Berechne γ für $C(1/4)$.

1.2 Für welche Lage von C erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$?

1.3 Für welche Lage von C erhält man Dreiecke, die bei C stumpfwinklig sind ?

2.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$, $B(8/0)$ und C.
C bewegt sich auf der Geraden mit $y = -\sqrt{3} \cdot x + 8\sqrt{3}$ im I. Quadranten.

2.1 Bestimme das Maß β des Winkels CBA.

2.2 Berechne $\gamma = \sphericalangle ACB$ für $x_c = 5$.

2.3 Für welche Lage von C ist $\gamma = 90°$? Welche Werte sind für γ möglich ?

3.0 Gegeben ist der Punkt $C(0/5)$ und der Kreis um $O(0/0)$ mit r = 5 cm.
Dem Kreis ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC so einbeschrieben, dass [AB] parallel zu x-Achse ist.

3.1 Berechne $\overline{AC}$ für $\gamma = 60°$ bzw. für $\gamma = 130°$.

3.2 Berechne den Inhalt der Dreiecksfläche für $\gamma = 60°$ bzw. für $\gamma = 130°$.

4.0 Gegeben sind die Eckpunkte $A(0/0)$ und $B(10/0)$ eines Dreiecks ABC. $M(5/2)$ ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC; C liegt im I. bzw. II. Quadranten.
Nach dem Randwinkelsatz hat $\sphericalangle ACB$ für alle Lagen von C das gleiche Maß γ.

4.1 Berechne $\sphericalangle ACB$ für $\overline{AC} = \overline{BC}$.

4.2 Bestimme $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ für $\sphericalangle BAC = \alpha = 68{,}2°$.

4.3 Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC für $\alpha = 68{,}2°$.

5.0 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge a cm.
Trägt man auf den Dreiecksseiten von den Ecken aus entgegen dem Uhrzeigersinn Strecken der Länge x cm ab, so entstehen neue einbeschriebene gleichseitige Dreiecke DEF, wobei gilt: $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = x$ cm und $x \leq a$. Der Winkel DEB hat das Maß ε.

5.1 Zeichne das Dreieck ABC für a = 6 und ein einbeschriebenes Dreieck DEF für x = 2 !
Markiere den Winkel mit dem Maß ε !

5.2 Berechne die Streckenlänge $\overline{DE} = y$ cm in Abhängigkeit von a und ε !

5.3 Gib die Grenzen für ε an !
Für welche Werte für ε wird die Streckenlänge $\overline{DE}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$ cm lang ?

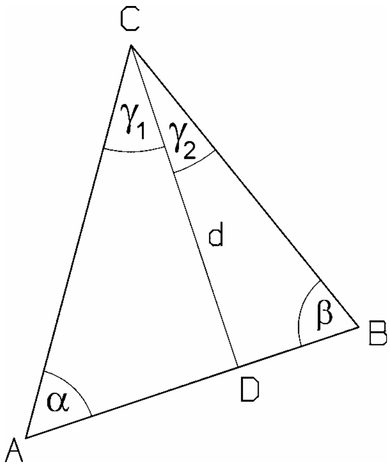
5.4 Berechne die Streckenlänge $\overline{DE} = y$ cm für $\varepsilon = 90°$ in Abhängigkeit von a !

5.5 Berechne die Streckenlänge $\overline{DE} = y$ cm in Abhängigkeit von x und berechne für den Fall 5.4 die Belegung von x in Abhängigkeit von a !

5.6 Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke DEF in Abhängigkeit von a und ε !

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen ebene Flächen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I



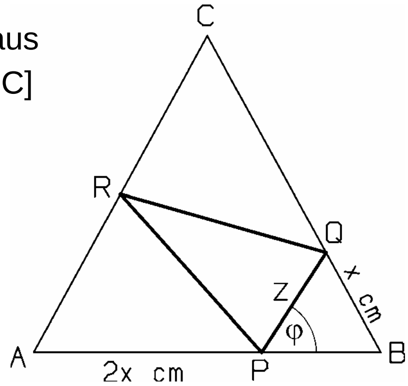
6.0 Im Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} = 155\text{ m}$; $\overline{AD} : \overline{DB} = 5 : 3$; $\gamma_1 = 35°$; $\gamma_2 = 22°$.
Bei den folgenden Rechnungen auf zwei Stellen nach dem Komma runden.

6.1 Berechne $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ und γ.

[Teilergebnis: $\overline{DB} = \frac{3}{8} \cdot 155\text{ m}$]

6.2 Stelle $\overline{DC} = d$ in Abhängigkeit von α und β dar und zeige, dass $\sin(123° - \alpha) = 1{,}09 \cdot \sin\alpha$ gilt.

6.3 Berechne mit Hilfe des Ergebnisses von 6.2 zunächst α und dann a und b.



7.0 Im gleichseitigen Dreieck ABC mit a = 10 cm werden von A aus auf [AB] Strecken [AP] mit $\overline{AP} = 2x$ cm und von B aus auf [BC] Strecken [BQ] mit $\overline{BQ} = x$ cm abgetragen ($x \in \mathbb{R}^+$).
Die Entfernung der Punkte P und Q beträgt $\overline{PQ} = z$ cm.

7.1 Stelle z in Abhängigkeit von x dar, und berechne daraus z_{min} für die kürzeste Entfernung $\overline{PQ}_{min}$ sowie $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ für diesen Fall.

[Teilergebnis: $z^2 = 10{,}7 + 7(x - \frac{25}{7})^2$]

7.2 Die Strecken [PQ] schließen mit [AB] Winkel mit dem Maß φ ein.
Zeige, dass z wie folgt in Abhängigkeit von φ dargestellt werden kann:

$$z = \frac{5\sqrt{3}}{2\sin\varphi + \sin(120° - \varphi)}$$

7.3 Tabellarisiere $z(\varphi)$ für $0° \le \varphi \le 90°$ in Schritten von $\Delta\varphi = 10°$, und zeichne den zugehörigen Graphen.

7.4 Entnimm dem Diagramm sowohl z_{min} als auch das zugehörige Winkelmaß φ_0, und berechne z_{min} und φ_0 mit dem Taschenrechner durch Intervallschachtelung auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

7.5 Der Term $2\sin\varphi + \sin(120° - \varphi)$ nimmt für $0° \le \varphi \le 90°$ stets Werte $a \in \mathbb{R}^+$ an.
Zeige, dass $2\sin\varphi + \sin(120° - \varphi) = a$ auf die Form $\left(\sin\varphi - \frac{5}{14}a\right)^2 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{28}\right)$ gebracht werden kann.
Zeige sodann, dass $a_{max} = \sqrt{7}$ gilt, und berechne damit φ_0.

7.6 Verbindet man P und Q mit dem Mittelpunkt R der Seite [AC], so erhält man die Dreiecke PQR. Berechne x für das flächenkleinste Dreieck PQR, und zeige, dass dieses Dreieck nicht die kürzeste Seite [PQ] enthält.

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen ebene Flächen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

8.0 Das gleichseitige Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 10$ cm ist gegeben. Von A aus werden x cm lange Strecken [AP] auf [AB], von B aus 2x cm lange Strecken [BQ] auf [BC] und von C aus 3x cm lange Strecken [CR] auf [AC] abgetragen ($x \in \mathbb{R}^+$). Dadurch erhält man Dreiecke PQR.

8.1 Für welchen Wert von x erhält man ein bei R rechtwinkliges Dreieck ?

8.2 Für welchen Wert von x gilt $\overline{QR} = \overline{RP}$?

8.3 Für welchen Wert von x erhält man das flächenkleinste Dreieck PQR ?

8.4 Welche Innenwinkelmaße besitzt das Dreieck PQR mit $\overline{PQ} = 7$ cm ?

8.5 Welche Maße kann der Winkel BPQ annehmen, den die Seiten [PQ] mit [AB] einschließen ?

9.0 Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge a cm werden gleichschenklige Dreiecke DEF so einbeschrieben, dass die Spitze E Mittelpunkt der Strecke [AB] ist. Der Winkel an der Spitze der Dreiecke DEF hat das Maß ε.

9.1 Zeichne das Dreieck ABC für a = 7 mit einem Dreieck DEF mit $\varepsilon = 70°$!

9.2 Gib die Grenzen für ε an ! Berechne die Schenkellänge $\overline{EF} = x$ cm in Abhängigkeit von a und ε (nicht $\frac{\varepsilon}{2}$) !

9.3 Für welchen Wert für ε wird die Streckenlänge $\overline{EF}$ minimal ? Gib die Grenzen für $\overline{EF} = x$ cm in Abhängigkeit von a an !

9.4 Für welche Werte für ε wird die Streckenlänge $\overline{EF} = x$ cm gleich $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ cm ?

9.5 Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke DEF in Abhängigkeit von a und ε ! Tabellarisiere den Term für den Flächeninhalt A im Intervall [0°; 180°] in Schritten $\Delta\varepsilon = 15°$ für a = 7 ! Zeichne ein ε-A-Diagramm !
Für die Zeichnung: ε-Achse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 15°$; A-Achse: $1\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 2\text{cm}^2$

9.6 Berechne die Basislänge $\overline{DF} = y$ cm in Abhängigkeit von a und ε !
Berechne für a = 7 und $\varepsilon = 30°$ die Basislänge $\overline{DF}$!

Trigonometrie - Zusammenfassende Übungen ebene Flächen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung

Klasse 10 I

10.0 Gegeben ist die Strecke [AD] mit dem Mittelpunkt M. Über der Strecke [AD] von der Länge $\overline{AD} = 2r$ cm ist ein Halbkreis mit M als Mittelpunkt zu zeichnen. Dem Halbkreis sind Dreiecke ABC_n so einzubeschreiben, dass B mit M zusammenfällt, während C den Halbkreisbogen durchlaufen soll.

10.1 Fertige eine Zeichnung mit r = 6, und trage drei beliebige Dreiecke ABC_n ein.

10.2 Bestimme die Seitenlänge $\overline{AC} = b$ cm in Abhängigkeit von $\overline{AB} = r$ cm und dem Winkelmaß α des Dreiecksinnenwinkels $\sphericalangle BAC$.

[Ergebnis: $b(r,\alpha) = 2 \cdot r \cdot \cos\alpha$]

10.3 Der Flächeninhalt der Dreiecke ABC_n lässt sich wie folgt darstellen:

$A(r,\alpha) = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 2\alpha$ cm^2

Weise dies rechnerisch nach !

10.4 Die Dreiecke rotieren mit AB als Achse. Berechne das Volumen $V(r,\alpha)$ der entstehenden Rotationskörper !

[Ergebnis: $V(r,\alpha) = \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \sin^2 2\alpha$ cm^3]

10.5 Tabellarisiere $V(r,\alpha)$ für r = 6 und $\alpha \in [0°;\ 90°]$ in Schritten von $\Delta\alpha = 10°$, und stelle dann $V(6,\alpha)$ graphisch dar.

Für die Zeichnung: α – Achse : 1cm $\hat{=}$ 10° ; V – Achse : 1cm $\hat{=}$ 20cm^3

10.6 Begründe algebraisch, dass sowohl die Dreiecksfläche $A(r,\alpha)$ als auch das Volumen $V(r,\alpha)$ des Rotationskörpers für $\alpha = 45°$ jeweils den größten Wert annimmt.

10.7 Für welche Werte für α wird für r = 6 der Flächeninhalt von 10.3 gleich 12 cm^2 ?

10.8 Für welche Werte für α wird das Volumen von 10.4 für r = 6 gleich 50π cm^3 ?

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

1.0 Die Basis [AB] eines gleichschenkligen Dreiecks ABC hat die Länge 10 cm.

1.1 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von α.
(Ergebnis: $A(\alpha) = 25 \tan\alpha \text{ cm}^2$)

1.2 Berechne den Umfang des Dreiecks in Abhängigkeit von α.

1.3 Zeichne die Graphen von $A(\alpha)$ und $u(\alpha)$ in einem sinnvoll gewählten Intervall mit $\Delta\alpha = 15°$.

1.4 Gibt es einen größten Wert für den Umfang (Flächeninhalt) ?

2.0 Die Schenkel [AC] und [BC] eines gleichschenkligen Dreiecks ABC haben die Länge 6 cm.

2.1 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von γ und bestimme A_{max}. Formuliere das Ergebnis als Satz.

2.2 Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von γ und zeichne den Graphen von $u(\gamma)$ in einem sinnvoll gewählten Intervall mit $\Delta\gamma = 20°$.

$$\left(\text{Ergebnis: } u(\gamma) = 12\left(\sin\frac{\gamma}{2} + 1\right)\text{cm}\right)$$

3.0 Vom Dreieck ABC sind gegeben: $A(0/0)$, $B(8/0)$ und $\overline{AC} = \overline{BC}$.

3.1 Bestimme den Umfang u_1 des Dreiecks ABC_1 und u_2 des Dreiecks ABC_2 für $\gamma_1 = 60°$ und $\gamma_2 = 90°$.

3.2 Bestimme den Dreiecksumfang u in Abhängigkeit von $\frac{\gamma}{2}$.

$$\left(\text{Ergebnis: } u(\gamma) = 8\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)\text{cm}\right)$$

3.3 Für welches Winkelmaß γ_3 ist $u_3 = 24$ cm ?

4.0 Die Kathete [AC] eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ($\alpha = 90°$) ist 8 cm lang.

4.1 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von β.

4.2 Zeichne den Graphen von $A(\beta)$ in einem sinnvoll gewählten Intervall für β. Erstelle eine Wertetabelle mit $\Delta\beta = 10°$.

4.3 Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von β.

4.4 Zeichne den Graphen von $u(\beta)$ (Bedingungen wie in Aufgabe 4.2).

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

5.0 Im Trapez ABCD gilt: $\overline{AB} = 2c$, $\overline{CD} = c$ (Grundlinien) und $\overline{BC} = c$.

5.1 Zeichne ein Trapez für c = 5 cm. Berechne seinen Flächeninhalt A in Abhängigkeit von c und β.

5.2 Es sei jetzt c = 5 cm. Stelle eine Wertetabelle für A(β) in einem sinnvoll gewählten Intervall mit $\Delta\beta = 30°$ auf.

5.3 Für welchen Wert β_0 ist der Flächeninhalt maximal ? Bestimme diesen maximalen Wert.

6.0 In einem gleichschenkligen Trapez ABCD ist die Grundseite [AB] doppelt so lang wie die zugehörige Höhe h.

6.1 Berechne die Länge l der Diagonalen in Abhängigkeit von der Höhe h und dem Winkelmaß α.

$$\left(\text{Ergebnis}: l\,(h;\alpha) = \frac{h}{\sin\alpha}\sqrt{4\sin^2\alpha - 2\sin 2\alpha + 1}\right)$$

6.2 Gib das Intervall an, in dem α variieren kann. Es darf kein „überschlagenes“ Viereck entstehen !

6.3 Zeichne den Graphen von l (α) für h = 10 cm ($\Delta\alpha = 15°$).

7.0 Ein Dreieck ABC mit β = 30° hat einen Umkreis mit dem Radius r = 3 cm.

7.1 Berechne den Umfang u des Dreiecks in Abhängigkeit von γ und zeichne den Graphen von u(γ) im größten für γ möglichen Intervall mit $\Delta\gamma = 30°$.

(Ergebnis: u(γ) = 6 (sin(150° - γ) + sinγ + 0,5) cm)

7.2 Bestimme mit Hilfe des Graphen den Wert γ_0, für den u maximal wird, sowie u_{max}.

7.3 Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks in Abhängigkeit von γ und zeichne den Graphen von A(γ) unter den Bedingungen von Aufgabe 7.1.

(Ergebnis: A(γ) = 9 sin(150° - γ) $\cdot$ sinγ cm^2)

7.4 Für welchen Wert γ_1 hat der Flächeninhalt seinen größten Wert ?
Bestimme graphisch diesen maximalen Wert.

8.0 Gegeben ist der Kreis um $O(0/0)$ mit r = 5 cm. Dem Kreis sind gleichschenklige Dreiecke ABC mit $C(0/5)$ einbeschrieben. [AB] ist parallel zur x-Achse.

8.1 Berechne $\overline{AC}$ in Abhängigkeit von γ (nicht $\frac{\gamma}{2}$).

Hinweis: Betrachte ΔABO.

(Ergebnis: $\overline{AC}(\gamma) = 5\sqrt{2(1+\cos\gamma)}$ cm)

8.2 Berechne den Inhalt A der Dreiecksfläche in Abhängigkeit von γ. Berechne A(40°).

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

9.0 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\alpha = 50°$ und $\beta = 60°$, sowie ein Punkt $D \in [BC]$.

9.1 Berechne $\overline{AD}$ in Abhängigkeit von $\varepsilon = \sphericalangle BAD$.

$\left(\text{Ergebnis: } \overline{AD}(\varepsilon) = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin(\varepsilon + 60°)}\text{cm}\right)$

9.2 Für welchen Wert ε_0 ist $\overline{AD}$ am kleinsten ? Bestimme $\overline{AD}_{min}$.

9.3 Wie kann das Ergebnis von 9.2 durch eine einfache geometrische Überlegung gefunden werden ?

10.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$ und $B(10/0)$ eines Dreiecks ABC. $M(5/2)$ ist Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. C liegt im I. bzw. II. Quadranten. Nach dem Randwinkelsatz ist $\sphericalangle ACB = \gamma$ konstant.

10.1 Berechne γ. Verwende das Dreieck ABC_1 mit $\overline{AC_1} = \overline{BC_1}$.

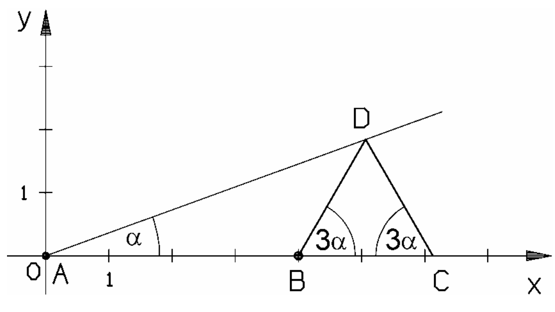
10.2 Bestimme $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in Abhängigkeit von $\sphericalangle BAC = \alpha$. Welche Werte kann α annehmen ?

(Ergebnis: $\overline{AC}(\alpha) = 10{,}77 \cdot \sin(\alpha + 68{,}2°)\text{ cm}$; $\overline{BC}(\alpha) = 10{,}77 \cdot \sin\alpha\text{ cm}$)

10.3 Bestimme den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC in Abhängigkeit von α.

10.4 Berechne mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Wert α_0, für den der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird. Gib A_{max} an.

11.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$ und $B(4/0)$.



11.1 Berechne die x-Koordinate des Punktes C für $\alpha_1 = 20°$.

11.2 Berechne die x-Koordinate des Punktes C in Abhängigkeit von α. Verwende ggf. $\sin 6\alpha = 2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$.

$\left(\text{Ergebnis: } x_c(\alpha) = 4 + 4 \cdot \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)$

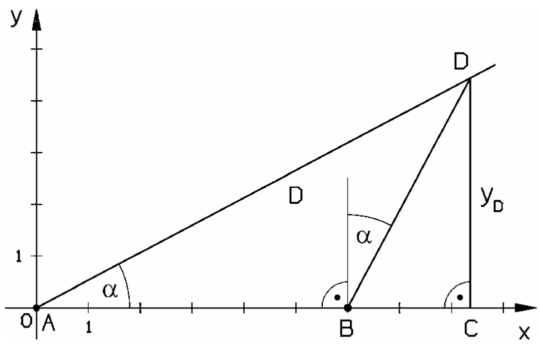
11.3 Berechne die Koordinaten von D für $\alpha_1 = 20°$.

11.4 Berechne die Koordinaten von D in Abhängigkeit von α.

$\left(\text{Ergebnis: } x_D = 4 + \dfrac{2 \cdot \cos 3\alpha}{\cos\alpha};\ y_D = \dfrac{2 \cdot \sin 3\alpha}{\cos\alpha}\right)$

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I



12.0 Gegeben sind die Punkte A(0/0) und B(6/0).

12.1 Berechne die Koordinaten von D für $\alpha_1 = 30°$.

12.2 Berechne die Koordinaten von D in Abhängigkeit von α.

13.0 Für das Dreieck PQR gilt:
P(2/0), R(0/10), Q(10/y_Q) mit $y_Q \in [0;\, 10]$.
[PQ] schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel mit dem Maß ε ein.

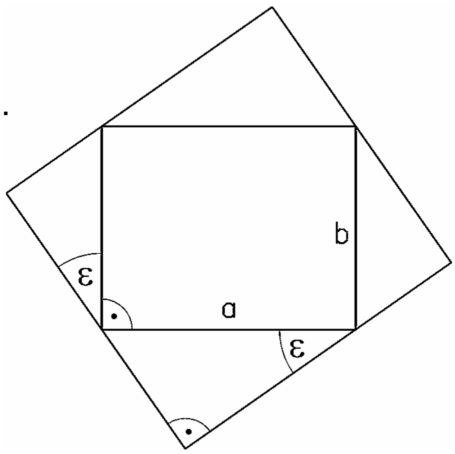
13.1 Stelle y_Q in Abhängigkeit von ε dar. Welche Werte kann ε annehmen ?

13.2 Stelle den Flächeninhalt A des Dreiecks PQR in Abhängigkeit von ε dar.
(Ergebnis: $A(\varepsilon) = (40 + 8 \tan\varepsilon)$ FE)

13.3 Für welchen Wert von ε_0 hat die Fläche den Inhalt 50 cm^2 ?

13.4 Für welche Winkelmaße ist der Flächeninhalt größer als 70 cm^2 ?

14.0 Einem Rechteck mit a = 5 cm und b = 4 cm ist ein Rechteck umbeschrieben, wobei die Seiten der beiden Rechtecke Winkel mit dem Maß $\varepsilon = 35°$ einschließen.



14.1 Fertige eine Zeichnung mit den angegebenen Maßen an.

14.2 Berechne die Seitenlängen c und d des umbeschriebenen Rechtecks.

14.3 ε sei nun variabel. Berechne die Seitenlängen des umbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von ε.

14.4 Berechne den Flächeninhalt A des umbeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von ε.
(Ergebnis: $A(\varepsilon) = (20 + 20{,}5 \sin 2\varepsilon)$ cm^2)

14.5 Für welches Winkelmaß ε_0 verhalten sich die Inhalte der beiden Rechtecke wie 3:2 ?

15.0 Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit A(0/0), B(6/0), C(6/6), D(0/6).
Ein Punkt P wandert von B aus über C und D nach A.

15.1 Bestimme den Flächeninhalt A des Dreiecks ABP in Abhängigkeit vom Maß α des Winkels BAP.
Hinweis: Unterscheide drei Fälle !

15.2 Tabellarisiere A(α) mit $\Delta\alpha = 10°$ und zeichne den Graphen von A(α).

15.3 Berechne den Wert α_0, für den der Flächeninhalt A = 16 cm^2 ist.

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

16.0 Gegeben sind die Punkte $A(0/0)$ und $B(10/0)$ sowie ein Punkt C, der auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten liegt. Für das Dreieckswinkelmaß β des Dreiecks ABC soll gelten: $\beta \in]0°;\ 90°[$.

16.1 Zeichne für einen beliebig gewählten Punkt C das Dreieck ABC.

16.2 Der Fußpunkt des Lotes von C auf [AB] sei F. Bestimme den Flächeninhalt A des Dreiecks FBC in Abhängigkeit von β.

$$\left(\text{Ergebnis: } A(\beta) = 50 \cdot \frac{\tan\beta}{(1+\tan\beta)^2}\text{FE}\right)$$

16.3 Tabellarisiere $A(\beta)$ mit $\Delta\beta = 10°$ und zeichne den Graphen.

16.4 Zeige, dass die Terme $T_1 = \dfrac{\tan\beta}{(1+\tan\beta)^2}$ und $T_2 = \dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{1}{\sin 2\beta}\right)}$ in G =]0°; 90°[

äquivalent sind durch Umformung von T_1 in T_2.

16.5 Bestimme mit Hilfe des Terms T_2 das Winkelmaß β*, für das der Flächeninhalt A des Dreiecks FBC maximal wird.
Bestimme die Koordinaten der zugehörigen Punkte F* und C*.

17.0 Einem gleichseitigen Dreieck ABC (Seitenlänge a) wird ein gleichschenkliges Dreieck DEF so einbeschrieben, dass seine Spitze F mit dem Mittelpunkt der Seite [AB] zusammenfällt. Der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ist φ.

17.1 Berechne den Umfang u des einbeschriebenen Dreiecks in Abhängigkeit von a und φ.

$$\left(\text{Ergebnis: } u(\alpha;\varphi) = \frac{a\sqrt{3}\cdot\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2\cdot\sin\left(30°+\frac{\varphi}{2}\right)}\text{cm}\right)$$

17.2 Zeichne den Graphen zu $u(\varphi)$ für a = 10 cm ($\Delta\varphi = 20°$) und bestimme den Wert des Minimums.

17.3 Berechne den Flächeninhalt A des einbeschriebenen Dreiecks in Abhängigkeit von a und φ.

$$\left(\text{Ergebnis: } A(a;\varphi) = \frac{3a^2\sin\varphi}{32\sin^2\left(30°+\frac{\varphi}{2}\right)}\text{cm}^2\right)$$

17.4 Stelle $A(\varphi)$ für a = 10 cm graphisch dar und bestimme den Wert des maximalen Flächeninhalts ($\Delta\varphi = 10°$).

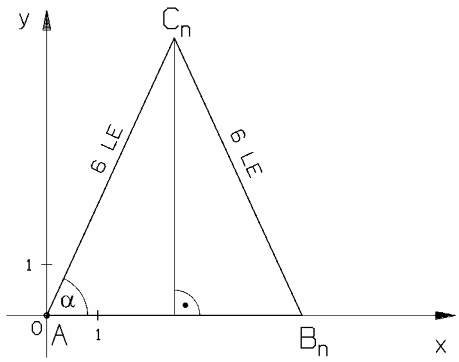
17.5 Durch Drehung um die Symmetrieachse der Figur entsteht ein Kegel, dem ein zweiter Kegel einbeschrieben ist. Berechne den Inhalt O der Oberfläche des einbeschriebenen Kegels in Abhängigkeit von a und φ.

17.6 Zeichne den Graphen von $O(\varphi)$ für a = 10 cm.

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

18.0 Die Punkte $A(0/0)$ und $B(2x/0)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 6LE$ und dem Basiswinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$.



18.1 Zeichne die Dreiecke ABC für $x \in \{1{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5\}$ im Koordinatensystem.
(Platzbedarf: $-1 \le x \le 12$; $-1 \le y \le 7$)
Auf welcher geometrischen Ortslinie liegen alle Punkte C ?

18.2 Berechne für $x \in \{1{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5\}$ die y-Koordinaten der Punkte C sowie die Winkel α.

18.3 Berechne die Koordinaten der Punkte B und C des Dreiecks ABC mit $\alpha = 30°$.

18.4 Gib den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABC in Abhängigkeit von x an.
(Ergebnis: $A(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ FE)
Berechne mit Hilfe des Terms für A(x) den Flächeninhalt der Dreiecke ABC für $x \in \{1{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5\}$.

18.5 Gib den Flächeninhalt $A(\alpha)$ der Dreiecke ABC in Abhängigkeit vom Winkelmaß α an.
(Ergebnis: $A(\alpha) = 36 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ FE)
Überprüfe mit Hilfe des Terms für $A(\alpha)$ die in Aufgabe 18.4 berechneten Flächeninhalte für $x \in \{1{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5\}$. Verwende dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 18.2.

18.6 Ermittle den Extremwert des Terms $T(z) = z \cdot (36 - z)$.
Bestimme daraus den Extremwert des Flächeninhalts A(x) sowie die zugehörige Belegung für x, indem du x^2 anstelle von z setzt.
(Teilergebnis: $x = 4{,}24$)

18.7 Ermittle das Winkelmaß α des flächengrößten Dreiecks ABC mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 18.6, und berechne damit den extremen Flächeninhalt.

18.8 Begründe geometrisch, dass der Flächeninhalt nicht größer als 18 FE werden kann.

19.0 Die Punkte $A(-1/0)$, $B(1/0)$ und C liegen auf dem Einheitskreis k_e und bilden Dreiecke ABC. F ist der Fußpunkt des Lotes von C auf AB.

19.1 Stelle die Streckenlängen $\overline{OF}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ in Abhängigkeit von $\varphi = \sphericalangle BOC$ dar.
Lösungshinweis: Verwende zur Berechnung von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ den Satz des Pythagoras.
(Teilergebnis: $\overline{AC} = \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}$ LE; $\overline{BC} = \sqrt{2(1 - \cos\varphi)}$ LE)

19.2 Ermittle mit Hilfe der Terme für $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ das gleichschenklige Dreieck.

19.3 Gib den Flächeninhalt $A(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ an. Für welches Maß φ^* ist der Flächeninhalt maximal ? Begründe das Ergebnis geometrisch.

19.4 Gib die kartesischen Koordinaten der Punkte A, B und C an, und zeige, dass die Dreiecke ABC rechtwinklig sind.
Anleitung: Berechne die Steigung m_{CB} und m_{CA} der Dreiecksseiten [CB] und [CA], und zeige, dass $m_{CB} \cdot m_{CA} = -1$ gilt.

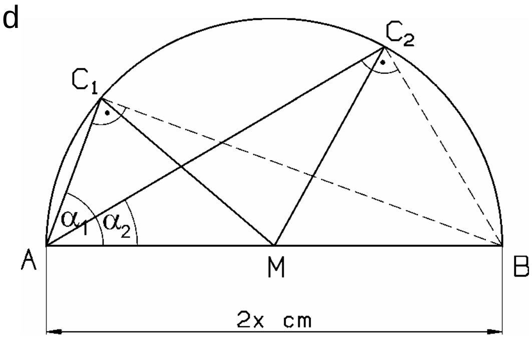
Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

Klasse 10 I

19.5 Zeige, dass in den Dreiecken ABC der Höhensatz gilt.

19.6 Begründe nun, dass die Eckpunkte $C(\cos\varphi/\sin\varphi)$ von Dreiecken ABC bzw. ACB den Kreis $k(O(0/0);\ r = 1\text{ LE})$ bilden.

20.0 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] und gleichzeitig Mittelpunkt eines Halbkreises mit $\overline{AB} = 2x\text{ cm}$ als Durchmesser.
Dem Halbkreis sind Dreiecke AMC_n so einzubeschreiben, dass C_n auf dem Halbkreis liegt.



20.1 Fertige für x = 6 eine Zeichnung an, und trage drei solche Dreiecke AMC_n ein.

20.2 Bestimme die Seitenlänge $\overline{AC}$ in Abhängigkeit von x und dem Maß α des Winkels MAC.
(Ergebnis: $\overline{AC} = (2x \cdot \cos\alpha)\text{cm}$)

20.3 Der Flächeninhalt A_Δ der Dreiecke AMC_n lässt sich wie folgt darstellen:
$A_\Delta = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 2\alpha\ \text{cm}^2$. Weise dies rechnerisch nach.

20.4 Die Dreiecke rotieren um AM als Achse. Berechne das Volumen V der entstehenden Rotationskörper.
$\left(\text{Ergebnis: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot x^3 \cdot \sin^2 2\alpha\ \text{cm}^3\right)$

20.5 Tabellarisiere V für x = 6 und $\alpha \in [0°;\ 90°]$ mit $\Delta\alpha = 10°$, und stelle V graphisch dar.
Für die Zeichnung: α-Achse: 1 cm entspricht 10°
V-Achse: 1 cm entspricht 20 cm^3

20.6 Begründe algebraisch, dass für α = 45° sowohl die Dreiecksfläche als auch das Volumen des Rotationskörpers jeweils den größten Wert annimmt.

20.7 Für welche Belegung von α erhält man Rotationskörper mit einem Volumen von 100 cm^3, wenn x = 6 gilt ?

21.0 Ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = b = 8\text{ cm}$, $\overline{AB} = c = 12\text{ cm}$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ rotiert um die Achse AB.

21.1 Zeichne für $\alpha \in \{30°;\ 70°;\ 120°;\ 150°\}$ die Axialschnitte in eine Figur.

21.2 Ermittle das Volumen $V(\alpha)$ dieser Rotationskörper in Abhängigkeit von α.
(Ergebnis: $V(\alpha) = 256 \cdot \pi \cdot \sin^2\alpha\ \text{cm}^3$)

21.3 Für welche Belegung von α erhält man den Körper mit dem größten Volumen ?

21.4 Gib die Oberfläche der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von α an.

21.5 Gib Intervalle für α an, für die das Volumen der Rotationskörper kleiner als $64\pi\ \text{cm}^3$ wird.

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

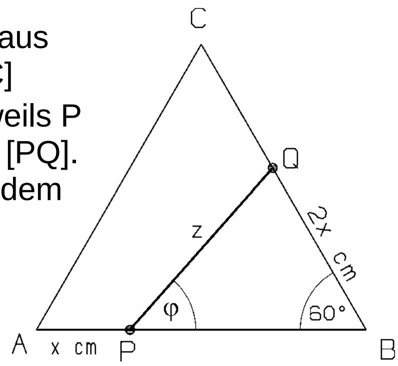
Klasse 10 I

22.0 Der Punkt P(z · cosφ / z · sinφ) bewegt sich auf der Geraden g mit der Gleichung y = -1,25x + 10, wobei $\overline{OP} = z\ \text{LE}$ mit $O(0/0)$ gilt.
Der Winkel zwischen der x-Achse und [OP] hat das Maß φ.

22.1 Zeige, dass $z = \dfrac{8\sin 51{,}34°}{\sin(\varphi + 51{,}34°)}$ und $z = \dfrac{10}{\sin\varphi + 1{,}25\cos\varphi}$ gilt, und berechne z für φ = 35° auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

22.2 Welche Koordinaten hat P, wenn $\overline{OP} = 7\ \text{LE}$ bzw. $\overline{OP} = 12\ \text{LE}$ gelten soll ? Berechne sodann die Koordinaten des Punktes P auf g, für den $\overline{OP}$ am kleinsten ist.

23. Trägt man im gleichseitigen Dreieck ABC mit a = 6 cm von A aus auf [AB] Strecken [AP] mit x cm Länge und von B aus auf [BC] Strecken [BQ] mit 2x cm Länge ($x \in \mathbb{R}^+$) ab und verbindet jeweils P mit Q, so erhält man verschieden lange Verbindungsstrecken [PQ]. Die z cm langen Strecken [PQ] schließen mit [AB] Winkel mit dem Maß φ ein.



Berechne z in Abhängigkeit von φ, tabellarisiere z(φ) in Schritten von $\Delta\varphi = 5°$ für $0° \leq \varphi \leq 60°$, und stelle z in Abhängigkeit von φ graphisch dar.
Für das zu z_{min} gehörende Winkelmaß φ_0 gilt $49{,}1° < \varphi_0 < 49{,}2°$. Berechne φ_0 durch Intervallschachtelung auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

24.1 Gleichschenkligen Dreiecken ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 10\text{ cm}$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$ werden gleichseitige Dreiecke PQR so einbeschrieben, dass P der Mittelpunkt von [AB] ist und die Symmetrieachse eines gleichschenkligen Dreiecks ABC auch Symmetrieachse des entsprechen den gleichseitigen Dreiecks PQR ist.
Zeichne für α = 75° das gleichschenklige Dreieck ABC mit dem einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck PQR.

24.2 Stelle die Maßzahl a der Seitenlängen $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP} = a\text{ cm}$ in Abhängigkeit von α dar.

$$\left(\text{Ergebnis: } a = \frac{10\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin(\alpha + 60°)}\right)$$

24.3 Begründe, dass $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ gilt.

24.4 Forme $a = \dfrac{10\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin(\alpha + 60°)}$ mit Hilfe des Ergebnisses von 24.3 um, und tabellarisiere a in Abhängigkeit von α in Schritten von $\Delta\alpha = 10°$ für $0° \leq \alpha \leq 90°$.
Zeichne den zugehörigen Graphen.

24.5 Entnimm dem Diagramm zu 24.4 das Winkelmaß α_0, für das man das gleichseitige Dreieck mit der größten Seitenlänge erhält. Verbessere das dem Diagramm entnommene Winkelmaß α_0 durch eine Intervallschachtelung mit dem Taschenrechner bis auf eine Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma.

Trigonometrie - Funktionale Abhängigkeiten an Dreiecken

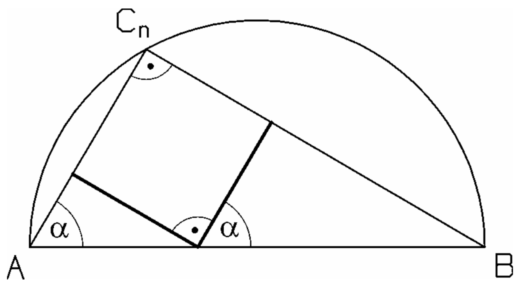
Klasse 10 I

25. Das Dreieck ABC mit $A(0/0)$, $B(9/2)$ und $C(4/7)$ ist gegeben. Im Inneren des Dreiecks ABC liegt ein Punkt P, für den $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CBP = \sphericalangle ACP = \varphi$ und

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \text{ gilt.}$$

Berechne φ und die Streckenlängen $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$, und zeichne das Dreieck ABC mit dem Punkt P in ein Koordinatensystem.

26.0 Rechtwinkligen Dreiecken ABC mit jeweils einer 12 cm langen Hypothenuse [AB] werden Quadrate mit C als einem Eckpunkt einbeschrieben.



26.1 Zeichne drei rechtwinklige Dreiecke mit einbeschriebenem Quadrat.

26.2 Zeige durch Rechnung, daß für den Flächeninhalt dieser Quadrate in Abhängigkeit vom Maß α des Winkels BAC gilt:

$$A(\alpha) = \frac{36 \cdot \sin^2 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}\ \text{cm}^2$$

26.3 Begründe geometrisch, daß man für α = 45° das Quadrat mit dem größten Flächeninhalt erhält.

26.4 Berechne α für A = 6 cm^2.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

1. Drehe die Gerade g mit $y = x - 3$ um O(0/0) mit $\alpha = 45°$. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden g'. Berechne das Maß des Winkels zwischen g und g'.

2. Die Gerade g mit $y = -x + 5$ soll um O(0/0) so gedreht werden, dass die Bildgerade parallel zur x-Achse ist. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden sowie das Maß des Drehwinkels (zwei Lösungen).

3. Auf der Normalparabel mit $y = -x^2 + 8x - 10$ wird ein Punkt A gesucht. Er soll Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks ABO sein, wobei O(0/0) und B ein Punkt der y-Achse sein soll. Das gleichschenklige Dreieck hat an der Spitze O das Innenwinkelmaß 45°. Bestimme die Koordinaten von B zeichnerisch und rechnerisch.

4.1 Zeige, dass der Punkt A(4/3) durch Drehung um O(0/0) auf den Punkt A'(-3/-4) abgebildet werden kann. Bestimme die Abbildungsgleichung der Drehung und das Drehwinkelmaß α.

4.2 Gleiche Aufgabenstellung wie 4.1, aber mit A'(0/-5).

5. Gegeben sind die Geraden g mit $y = -x + 5$ und h mit $x = -2$. Gesucht sind zwei Punkte $A \in g$ und $B \in h$ so, dass ΔOAB gleichschenklig-rechtwinklig mit der Spitze O(0/0) wird. Zeichnung !

6. Gegeben ist Q(5/4). Gesucht ist die dritte Ecke R eines gleichseitigen Dreiecks OQR mit O(0/0). Zeichnung !

7.0 Gegeben sind die Geraden g_1 durch $y = x + 3$ und g_2 durch $y = -x + 5$.
Gesucht ist eine Gerade g_3 durch O(0/0), so dass die durch g_1 und g_2 aus g_3 ausgeschnittene Strecke durch O halbiert wird.

7.1 Löse die Aufgabe konstruktiv.
Hinweis: Führe eine Punktspiegelung von g_1 und g_2 an O durch!

7.2 Berechne die Gleichung von g_3.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

8.0 Gegeben ist der Punkt P(5/0).

8.1 Berechne die Koordinaten seines Bildpunktes P' in Abhängigkeit vom Maß α des Drehwinkels bei einer Drehung um O(0/0).

8.2 Stelle die Entfernung $e(\alpha) = \overline{PP'}$ in Abhängigkeit von α dar.

[Ergebnis: $e(\alpha) = (5\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$ cm]

8.3 Für welchen Wert von α ist ein Minimum, für welchen ein Maximum für den Graphen von $e(\alpha)$ zu erwarten ? Welche Wertemenge ergibt sich für $e(\alpha)$? Begründung !

8.4 Welche Symmetrie ist zu erwarten? Begründung !

8.5 Tabellarisiere $e(\alpha)$ mit $\Delta\alpha = 10°$ in einem sinnvollen Intervall. Stelle nun $e(\alpha)$ graphisch dar.

9.0 Das Dreieck ABC mit A(-3/-3,5), B(4/0,5) und C(-3/1,5) wird an der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x$ gespiegelt.

9.1 Zeichne die Dreiecke ABC und A'B'C' sowie die Spiegelachse g im Koordinatensystem.

9.2 Gib die Abbildungsvorschrift an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C'.

[Ergebnis: A'(1/4,5); B'(2/-3,5); C'(-3/1,5)]

9.3 Zeige rechnerisch, dass sich die Strecken [AB] und [A'B'] auf der Geraden g schneiden, und begründe dies geometrisch.

9.4 Das Ergebnis 9.2 zeigt, dass der Punkt C ein Fixpunkt ist. Weise dies auf andere Weise nach.

10.0 Das Dreieck ABC mit A(2/-1) und C(4/3) wird um den Ursprung O(0/0) mit dem Drehwinkel φ auf das Dreieck A'B'C' mit B'(2/6) und C'(0/5) abgebildet.

10.1 Ermittle den Drehwinkel φ zeichnerisch und rechnerisch.
Gib die Abbildungsgleichung an, und berechne die Koordinaten der Punkte A' und B.

[Ergebnis: $\varphi = 53{,}13°$; A'(2/1); B(6/2)]

10.2 Berechne die Winkel BAC und B'A'C', und zeige, dass sie gleich groß sind.

10.3 Zeige, dass sich die Geraden BC und B'C' unter dem Drehwinkel φ schneiden.

10.4 Das Dreieck ABC wird gegen den Uhrzeigersinn um O(0/0) gedreht, so dass der Punkt B'' auf der x-Achse liegt. Berechne den Drehwinkel ε sowie die Koordinaten der Bildpunkte A'' und C''.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

11.0 Die Punkte A(-3/-4,5), B(4/1) und C(3/4,5) sind Eckpunkte eines Drachenvierecks ABCD. Symmetrieachse ist AC.

11.1 Zeichne das Drachenviereck ABCD (Platzbedarf: $-4 \le x \le 5$; $-5 \le y \le 5$).

11.2 Berechne die Koordinaten des Eckpunktes D.

11.3 Welche Bedingung müssen die Koordinaten der Punkte $B_r(x/y)$ erfüllen, so dass die Drachenvierecke AB_rCD_r Rauten sind?
(Ergebnis: $y = -\frac{2}{3}x$)

11.4 Berechne mit Hilfe des Ergebnisses in 11.3 die Koordinaten des Punktes D_r der Raute AB_rCD_r mit $B_r(6/y)$.

11.5 Zeige rechnerisch, dass die Rauten AB_rCD_r in 11.3 auch zur Geraden B_rD_r symmetrisch sind.

12.0 Die Punkte B(4/-3) und D(0/5) sind Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes ABCD. Seine Symmetrieachse $m_{[AB]}$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.

12.1 Zeichne das Trapez ABCD im Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Punkte A und C.
[Ergebnis: A(-4/3); C(4,8/1,4)]

12.2 Zeige rechnerisch, dass der Mittelpunkt $M_{[BC]}$ des Schenkels [BC] auf den Mittelpunkt $M_{[AD]}$ des Schenkels [AD] gespiegelt wird, und begründe dies mit Hilfe der Satzgruppe der Achsenspiegelung.

13.1 Bilde das Dreieck ABC mit A(-1/-2), B(2/-1) und C(1/2) durch Punktspiegelung an Z_1(-1/2) ab. Fertige eine Zeichnung an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C' (Platzbedarf: $-5 \le x \le 7$; $-3 \le y \le 7$).
[Ergebnis: A'(-1/6); B'(-4/5); C'(-3/2)]

13.2 Bilde das Dreieck A'B'C' aus 13.1 durch Punktspiegelung an Z_2(1/4) ab. Zeichne das Bilddreieck A'B'C' in die Zeichnung zu 13.1 ein, und berechne die Koordinaten der Punkte A'', B'' und C''.

13.3 Zeige rechnerisch, dass die Verknüpfung der Punktspiegelungen in 13.1 und 13.2 durch eine Parallelverschiebung ersetzt werden kann. Berechne die Koordinaten des Verschiebungsvektors.

14. Der Winkel BAC im Dreieck ABC mit A(0/0), B(5/2) hat das Maß $\alpha = 50°$. Der Eckpunkt C liegt auf der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

Berechne die Koordinaten des Eckpunktes $C(x/-\frac{1}{2}x + 7)$.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

15. Im Dreieck ABC gilt A(0/4), C(1/6) sowie $\sphericalangle ACB = 72°$. Der Punkt B liegt auf der Geraden g mit $y = 2x - 8$. Berechne die Koordinaten von B.

16. Der Eckpunkt C des Dreiecks ABC mit A(-1/-2), B(6/0) und $\sphericalangle BAC = 55°$ liegt auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 13$. Welche Koordinaten hat C ?

17.0 Das Dreieck ABC mit A(2/-1,5), B(5/-1,5) und C(3/1) wird an der Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x$ gespiegelt, das Bilddreieck A'B'C' danach an der Geraden g_2 mit $y = -2x$.

17.1 Fertige eine Zeichnung an (Platzbedarf: $-6 \le x \le 6; \quad -2 \le y \le 6$).

17.2 Berechne die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C', A'', B'', C''.

17.3 Durch welche Abbildung kann man die beiden Spiegelungen ersetzen ?
Gib die Abbildungsgleichung an.

17.4 Welche Bedeutung hat der Winkel, den die beiden Achsen g_1 und g_2 miteinander bilden für die Ersatzabbildung ?

17.5 Welches Ergebnis erhält man, wenn man das Dreieck ABC aus 17.0 zuerst an g_2 und dann an g_1 spiegelt ?

18.0 Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-1/2), B(4/1), C(3/5). Es soll durch zentrische Streckung mit Z_1(0/4) und k_1 = -0,5 abgebildet werden. Das Bilddreieck A'B'C' soll noch einmal durch zentrische Streckung mit Z_2(-0,5/6,5) und k_2 = 4 abgebildet werden.

18.1 Zeichne das Dreieck ABC sowie die beiden Bilddreiecke A'B'C' und A''B''C''
(Platzbedarf: $-7 \le x \le 5; \quad -6 \le y \le 7$).

18.2 Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der beiden Bilddreiecke.

18.3 Zeige, dass man die beiden zentrischen Streckungen durch eine neue zentrische Streckung mit dem Zentrum Z* und dem Streckungsfaktor k* ersetzen kann.
Ermittle Z* und k* zeichnerisch und rechnerisch, und gib die Abbildungsgleichung an.
(Teilergebnis: Z*(0,5/1,5); k* = -2)

18.4 Berechne mit Hilfe der Abbildungsgleichung in 18.3 aus den Koordinaten der Punkte A, B, C die Koordinaten der Eckpunkte A'', B'', C''.

18.5 Zeige, dass die drei Streckungszentren Z_1, Z_2 und Z* auf einer Geraden liegen.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

19.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$.
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: $y = -2$.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-6 \leq x \leq 8$; $-6 \leq y \leq 6$

19.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(-4/-2)$; $B_2(-2/-2)$; $B_3(4/-2)$

19.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0{,}5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

19.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $6\sqrt{3}$ FE besitzt.

19.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

20.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$.
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: $x = 4$.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-3 \leq x \leq 8$; $-6 \leq y \leq 7$

20.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(4/-5)$; $B_2(4/-3)$; $B_3(4/3)$

20.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0{,}5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

20.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $5\sqrt{3}$ FE besitzt.

20.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

21.0 Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$.
Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g: $y = \sqrt{3} \cdot x - 1$.
Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung; $-5 \leq x \leq 5$; $-6 \leq y \leq 8$

21.1 Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(-2/?)$; $B_2(-0{,}5/?)$; $B_3(4/?)$

21.2 Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0{,}5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0.

21.3 Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $9\sqrt{3}$ FE besitzt.

21.4 Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck.
Berechne den Flächeninhalt A_{min} dieses Dreiecks.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

22. Die gleichschenkligen Dreiecke AB_nC_n mit A(0/0), $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$ und $\sphericalangle B_nAC_n = \alpha$ bilden eine Dreiecksschar. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g.
Fertige jeweils eine Zeichnung an, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte C_n. Berechne sodann die Eckpunktskoordinaten der Schardreiecke AB'C', deren Eckpunkt C' auf der Parabel p liegt.

a) $\alpha = 45°$; g: $y = -x + 4\sqrt{2}$; p: $y = x^2 - 2x - 4$

b) $\alpha = 90°$; g: $y = -2x - 3$; p: $y = -x^2 + 5$

c) $\alpha = 120°$; g: $x = -4$; p: $y = -x^2 + 4x - 2$

23. Der Punkt C(0/0) ist Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken mit $\sphericalangle ACB = 135°$ (90°) und $\overline{AC} = \overline{BC}$, deren Eckpunkte A und B auf den Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x - 4$ und g_2 mit $y = 2x + 4$ liegen.

a) $A \in g_1 \wedge B \in g_1$

b) $A \in g_2 \wedge B \in g_2$

c) $A \in g_1 \wedge B \in g_2$

d) $A \in g_2 \wedge B \in g_1$

Konstruiere die Dreiecke, und berechne sodann die Koordinaten der Punkte A und B auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

24.1 Die Punkte A(-2/3) und C(6/-3) sind Eckpunkte von Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n, die [AC] als gemeinsame Diagonale besitzen. Die Eckpunkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 3x - 1$. Trage die Punkte A und C, die Gerade g und die auf g liegenden Punkte $D_1(1/y_1)$ und $D_2(-1{,}5/y_2)$ in ein Koordinatensystem ein, und zeichne sodann die Parallelogramme AB_1CD_1 und AD_2CB_2.

24.2 Begründe, dass für die Punkte B_n die Gleichung $\overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{D_nC}$ und $D_n \xrightarrow{M} B_n$ mit M als Mittelpunkt der Strecke [AC] gilt. Berechne mit beiden Abbildungen die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte $B_{n'}$ und zeichne ihn in das Diagramm zu 24.1 ein.

24.3 Prüfe, ob es unter den Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n Rechtecke und Rauten gibt, berechne gegebenenfalls die Koordinaten der Eckpunkte $D_{n'}$ und trage diese Parallelogramme in die Zeichnung zu 24.1 ein.

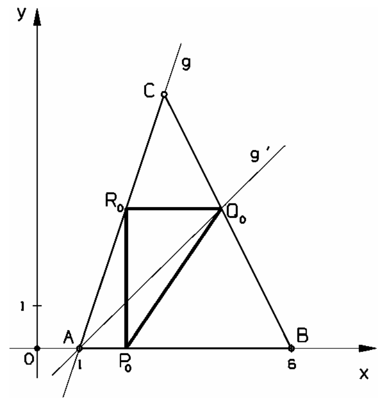
24.4 Für welche Parallelogramme AB_nCD_n gilt $\overline{AD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{D_nC}$?
Berechne die Koordinaten der Punkte $D_{n'}$.

25. Das Dreieck ABC mit A(2/5), B(5/2) und C(7/7) und die Gerade g mit $y = 3x$ sind gegeben. Es gibt Rauten, deren eine Diagonale auf g liegt und doppelt so lang wie die andere Diagonale ist, die einen Punkt auf einer Seite des Dreiecks ABC mit einem Punkt auf der y-Achse verbindet.
Konstruiere die Rauten, und berechne dann die Koordinaten ihrer Eckpunkte.
Platzbedarf: $-3 \le x \le 8$; $-1 \le y \le 13$

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

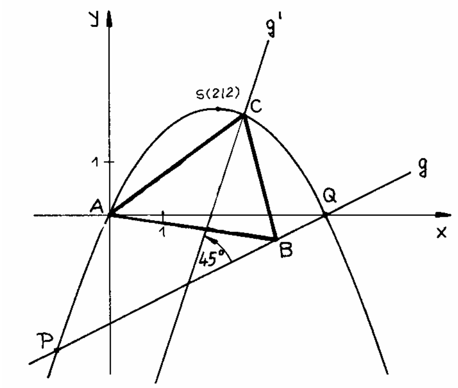
26. Es sind ein Dreieck ABC mit A(1/0), B(6/0), C(3/6) und eine Schar ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke $P_nQ_nR_n$ mit $\overline{P_nR_n} : \overline{R_nQ_n} = 3:2$ und $\sphericalangle P_nR_nQ_n = 90°$ gegeben. Die Eckpunkte R_n liegen auf der Geraden AC = g; die Seiten $[P_nR_n]$ stehen auf der x-Achse senkrecht.
Ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte Q_n. Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte des Schardreiecks $P_0Q_0R_0$, das dem gegebenen Dreieck ABC einbeschrieben ist.
Lösungshinweis: $g \xrightarrow{\text{x-Achse; } \varphi} g'$; $\tan\varphi = -\frac{2}{3}$



27. Zwischen der Parabel p mit $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ und der Geraden g = PQ mit P(-1/-2,5) und Q(4/0) ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit A(0/0) und $\sphericalangle BAC = 45°$ einbeschrieben.

a) Ermittle zunächst die Gleichung der Geraden g' und berechne damit die Koordinaten der Eckpunkte B und C.

b) Begründe sodann, dass $\overline{AB} \xrightarrow{A;\ \varphi=45°} \overline{AC}$ und somit $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \frac{1}{2}\bar{x} - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A;\ \varphi=45°} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{pmatrix}$ gilt und berechne so die Koordinaten der Punkte $B(\bar{x} / \frac{1}{2}\bar{x} - 2)$ und $C(x / -\frac{1}{2}x^2 + 2x)$.



28. Dem Bereich mit $y \geq 0 \wedge y \geq -2x - 10 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ sollen Drachenvierecke AB_nCD_n einbeschrieben werden, so dass $B_n \in p$ mit $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ und $D_n \in g$ mit $y = -2x - 10$ gilt. Die Punkte A(0/0) und C(-6/3) liegen auf der gemeinsamen Symmetrieachse der Vierecke.
Konstruiere die Drachenvierecke, und berechne die Koordinaten der Punkte B_n und D_n auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.
Für die Zeichnung: $-9 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 6$

29. Die Parabeln p_1 mit $y = x^2 + 2x - 1$ und p_2 mit $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$ schneiden sich in den Punkten A und B. Der Punkt A ist Büschelpunkt eines Geradenbüschels. Berechne die Koordinaten der Schnittpunke A und B und ermittle die Gleichung der Büschelgeraden, aus der beide Parabeln gleichzeitig Sehnen ausschneiden, deren Längen sich wie 2:1 verhalten.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

30.1 Die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n mit A(0/0) und B(6/0) liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 6$. Ermittle die Gleichung der Trägergraphen der Mittelpunkte der Seiten $[AC_n]$ und $[BC_n]$ sowie der Schwerpunkte der Dreiecke ABC_n.

30.2 Eines der Dreiecke ABC_n besitzt den kleinsten möglichen Umfang. Berechne die Koordinaten des zugehörigen Eckpunktes C_n.

31. Eine Dreiecksschar besteht aus gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit $A_n(x/0)$, $C_n(x/2x+2)$ und $\overline{A_nB_n} = \overline{B_nC_n}$. Zeichne die Schardreiecke für $x \in \{-2{,}5;\ 1;\ 3\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichungen der Trägergraphen der Mittelpunkte M_n der Seiten $[A_nC_n]$ und der Eckpunkte B_n. Berechne sodann die Koordinaten des dem Dreieck PQR mit P(-1/0), Q(7,5/0) und R(4/10) einbeschriebenen Schardreiecks $A_0B_0C_0$.

32. Die ähnlichen Dreiecke P_nQR_n mit Q(0/0), $P_n(x/-\frac{1}{2}x+5)$, $\sphericalangle R_nQP_n = 90°$ und $\overline{P_nQ} : \overline{R_nQ} = 2:1$ bilden eine Dreiecksschar. Auf welchem geometrischen Ort liegen alle Eckpunkte R_n ? Ermittle seine Gleichung. Welches Schardreieck besitzt den kleinsten Flächeninhalt ?

33. Der Punkt A(0/0) ist Eckpunkt eines Quadrates ABCD mit C(-3/?) und D(x/x-4). Konstruiere das Quadrat und berechne die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D. Platzbedarf: $-5 \le x \le 7$; $\quad -6 \le y \le 4$

34.0 Das Dreieck ABC mit A(-1,5/2), B(1/-0,5) und C(2,5/5) soll durch Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden so abgebildet werden, dass der Punkt A' auf der x-Achse liegt.

34.1 Ermittle zeichnerisch die beiden möglichen Spiegelachsen g_1 und g_2 sowie die beiden Bilddreiecke.

34.2 Ermittle rechnerisch die Spiegelungsmatrizen, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte.

34.3 Gib die Gleichungen der beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 an, und bestätige mit ihrer Hilfe, dass einmal der Punkt C, das andere Mal der Punkt B ein Fixpunkt ist.

34.4 Zeige, dass die beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander stehen, und begründe dies.

34.5 Zeige rechnerisch, dass man das Dreieck A'B'C' durch eine Punktspiegelung am Ursprung O(0/0) auf das Dreieck A''B''C'' abbilden kann. Begründe dies.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

35.0 Die Punkte A(x/0) mit $x \in \mathbb{R}^+$, B(6/4) und C sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken ABC mit der Basis [AC] und mit OB als Symmetrieachse.

35.1 Zeichne die Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 und A_3BC_3 mit $x \in \{2;\ 3{,}5;\ 6\}$ in ein Koordinatensystem.

35.2 Berechne die Koordinaten der Punkte C für die in 35.1 gezeichneten Dreiecke.

35.3 Die Punkte A_n beschreiben eine Strecke, die auf der x-Achse liegt. Bestimme das Intervall für x. Ermittle rechnerisch die Gleichung der Geraden, auf der die Punkte C liegen, und gib auch für deren Rechtswerte ein Intervall an.

35.4 Ermittle x, so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechne die Koordinaten von C.

35.5 Ermittle x, so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist, und berechne die Koordinaten von C.

35.6 Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A_0BC_0 mit $A_0(2{,}5/0)$, und ermittle die Koordinaten des Dreiecks A_4BC_4, das den gleichen Flächeninhalt besitzt.

36.0 Gegeben sind die Punkte A(x/-1) und B(0/10-x) mit $0 \le x < 10$ und $x \in$ R.
Die Punkte B werden an der Geraden g mit $y = -\frac{2}{3}x$ gespiegelt. Es entstehen Dreiecke ABB'.

36.1 Zeichne die Dreiecke ABB' für $x \in \{5;\ 7{,}5;\ 9\}$ in ein Koordinatensystem.

36.2 Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der in 36.1 gezeichneten Dreiecke ABB'.

36.3 In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit [BB'] als Basis. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.

36.4 Berechne die Belegung für x, mit der sich ein gleichschenkliges Dreieck mit [B'A] als Basis ergibt.

36.5 In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse [B'A]. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.

36.6 Gib die Koordinaten der Punkte B' in Abhängigkeit von x an.
[Ergebnis: B'(0,9x-9,2/0,4x-3,8)]

36.7 Bestimme mit Hilfe des Ergebnisses in 36.6 den Flächeninhalt A(x) der Dreiecke ABB' in Abhängigkeit von x.
[Ergebnis: $A(x) = (-0{,}2x^2 - 2{,}8x + 50{,}6)$ FE]

36.8 Welche Belegung für x ergibt das flächengrößte Dreieck ?

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

37.0 Die Dreiecke ABC mit A(1/-1), B(2/0), C(-1/3) und A'B'C' mit A'(1/0,5), B'(3,5/3), C'(-4/10,5) sind gegeben.

37.1 Zeichne die Dreiecke ABC und A'B'C' in ein Koordinatensystem.

37.2 Zeige, dass man das Dreieck ABC durch zentrische Streckung auf das Dreieck A'B'C' abbilden kann. Ermittle rechnerisch das Streckungszentrum Z und den Streckungsfaktor k.

37.3 Das Dreieck ABC soll von Z(1/-2) aus gestreckt werden, so dass der Mittelpunkt M'' der Dreiecksseite [B''C''] auf der y-Achse liegt. Berechne den Streckungsfaktor k'' und die Koordinaten der Eckpunkte A'', B'', C''.

37.4 Die Eckpunkte der Dreiecke ABC, A'B'C' und A''B''C'' liegen jeweils auf einer der Parabeln p, p', p''. Bestimme die Parabelgleichungen, und zeichne die Parabeln in die Zeichnung zu 37.1 ein.

37.5 Ermittle den Streckungsfaktor k*, so dass das Dreieck A*B*C* den Flächeninhalt A = 35 FE erhält.

38.0 Punkte B(x/y) auf der Geraden g mit der Gleichung y = - 2x + 16 legen zusammen mit den Punkten O(0/0) und A(x/0) für $x \in]0;\ 8[$ eine Schar von rechtwinkligen Dreiecken OAB fest. Der Winkel AOB hat das Maß α mit $\alpha \in]0°;\ 90°[$.

38.1 Zeichne die Gerade g sowie die Dreiecke OA_1B_1 für $A_1(6/0)$, OA_2B_2 für $\alpha = 75°$ und OA_3B_3 für $B_3(x_3/13)$ in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit. Berechne jeweils α in den Dreiecken OA_1B_1 und OA_3B_3.

38.2 Zeige, dass zwischen dem Abszissenwert x der Dreieckseckpunkte A bzw. B und α die Beziehung $x = \dfrac{16}{2 + \tan\alpha}$ besteht und berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und B_2.

38.3 Bestätige durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke OAB in Abhängigkeit von α gilt: $A(\alpha) = 128 \cdot \dfrac{\tan\alpha}{(2 + \tan\alpha)^2}\,\text{cm}^2$.

38.4 Ermittle α und dann die Koordinaten der Dreieckseckpunkte A und B im Falle $A = \dfrac{128}{9}\,\text{cm}^2$. Auf welche Dreieckssonderform gelangt man dabei ?

38.5 Bestätige durch Rechnung die folgenden Termumformungen:

a) $$\frac{\tan\alpha}{(2 + \tan\alpha)^2} = \frac{1}{\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha + 4} = \frac{1}{\left(\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right) + 4}$$

b) $$\frac{4}{\tan\alpha} + \tan\alpha = \tan\alpha + \frac{4}{\tan\alpha} = \left(\sqrt{\tan\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\tan\alpha}}\right)^2 + 4 = T(\alpha)$$

38.6 Für welchen Winkel α_0 nimmt der Term $T(\alpha)$ einen minimalen Wert an?

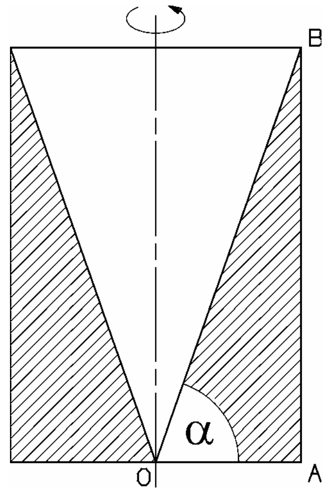
Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

38.7 Begründe, dass für α_0 das zugehörige Dreieck OA_0B_0 unter allen Dreiecken OAB den größten Flächeninhalt besitzt, und gib diesen an. Berechne die Koordinaten der Punkte A_0 und B_0, und zeichne das Dreieck OA_0B_0 ein.

38.8 Zeichne das Dreieck OA*B* ein, das unter allen Dreiecken OAB die kürzeste Hypotenuse besitzt, und berechne α^* sowie die Koordinaten der Punkte A* und B*.

38.9 Von welcher Art sind die Rotationskörper, die entstehen, wenn die Dreiecke OAB um die y-Achse rotieren ?
Siehe dazu nebenstehende Skizze,



38.10 Bestätige, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von α gilt:
$V = \frac{8192}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\tan\alpha}{(2+\tan\alpha)^3} \text{cm}^3$.

38.11 Stelle zu V eine numerische Wertetabelle auf $(\Delta\alpha = 5°)$, und zeichne den Graphen zu V. Wähle auf der α-Achse 1 cm für 10°, auf der V-Achse 1 cm für 20 cm^3.

38.12 Entnimm dem Graphen in 38.11 den Wert α, der zum volumengrößten Rotationskörper gehört.
Nimm Stellung zu der Aussage: „Der zum flächengrößten Dreieck OAB gehörende Rotationskörper hat das größte Volumen“.

39. Dem durch $y \le \sqrt{3}(x-3)+6 \wedge y \le -\sqrt{3}(x-3)+6 \wedge y \ge 0$ beschriebenen Bereich sollen ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein gleichschenkliges Dreieck AB_0C_0 mit $\sphericalangle B_0AC_0 = 45°$ und A(0/0) einbeschrieben werden.
Zeichne den gegebenen Bereich in ein Koordinatensystem, und ermittle die gesuchten Dreiecke zunächst geometrisch. Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte B, C, B_0 und C_0 auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

40. Auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 12$ liegen die Eckpunkte C_n der Dreiecke AB_nC_n mit A(-3/0), B(x/0) und $C_n(x/x^2 - 6x + 12)$. Ermittle die Gleichungen der geometrischen Ortslinien der Mittelpunkte M_n der Seiten $[B_nC_n]$ und der Dreiecksschwerpunkte S_n.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

41.1 Bei einer Abbildung werden die Punkte P(x/y) auf die Punkte P'(x+2y/y) abgebildet. Zeige, dass diese Abbildung geradentreu ist, und gib ihre Abbildungsvorschrift in der Matrixschreibweise an.

41.2 Die Eckpunkte D_n(x/x+3) einer Schar von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ mit A_n(x/0) werden durch die in 41.1 gegebene Abbildung auf die Eckpunkte C_n abgebildet.
Zeichne die Rechtecke für $x \in \{-2; -1; \;2\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n.
Platzbedarf: $-5 \le x \le 9; \quad -2 \le y \le 9$

41.3 Das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ der Rechtecksschar ist dem Dreieck PQR mit P(-3/0), Q(7,5/0) und R(4/7) einbeschrieben.
Berechne die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechtecks.

42. Das Dreieck ABC mit A(2/1), B(6/3) und C(5/6) wird auf das Dreieck A'B'C' mit A'(-1/2), B'(-3/6) und C'(-0,4/7,8) abgebildet. Ermittle die Abbildungsgleichung in der Matrixform, und gib an, um welche Abbildung es sich handelt. Welche Gerade ist Fixpunktgerade und welche Geraden sind Fixgeraden?

43. Die Gerade g_1 mit $y = \frac{4}{3}x + 3$ soll so gedreht werden, dass sie auf die Gerade g_2 mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x$ fällt. Dabei soll jedoch gleichzeitig der Punkt A_1(3/7) auf der Geraden g_1 auf den Punkt A_2(0/0) auf der Geraden g_2 abgebildet werden.
Berechne die Koordinaten des Drehzentrums und das Maß des Drehwinkels.

Trigonometrie - Flächeninhalt von Dreiecken bestimmen

Klasse 10 I

1. Berechne jeweils den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

a) a = 2,5 cm b = 6,9 cm $\gamma = 32°$

b) b = 3,40 m c = 9,23 m $\alpha = 58{,}7°$

c) a = 55 mm c = 29 mm $\beta = 123{,}8°$

2. In einem Park wird ein dreieckiges Rasenstück neu angesät. Zwei Seiten sind 2,5 m bzw. 6 m lang, der dazwischen liegende Winkel misst 50°.
Wieviel Grassamen benötigt man, wenn pro Quadratmeter 40 g Grassamen gesät werden ?

3. Zeige mit Hilfe einer Flächenformel, dass für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a gilt: $A\Delta = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

4. Berechne den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks ABC, in dem a = b = 3,4 cm und $\alpha = 44°$ gegeben sind.

5. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, in dem b = c = 12,3 cm und $\beta = 72°$ gegeben sind.

6. Zeige allgemein: der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis [AB] lässt sich berechnen mit: $A\Delta = \frac{1}{2}a^2 \sin\gamma = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha$.

7. Im Dreieck ABC sind gegeben: a = 5 cm, b = 7 cm, $\beta = 40°$.
Bestimme zunächst die weiteren benötigten Stücke und berechne dann den Flächeninhalt des Dreiecks nach den in Aufgabe 3 und 6 hergeleiteten Formeln.

8. Um wieviel Quadratmeter ändert sich eine Grundstücksfläche von der Form eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge 25 m), wenn eine Seite um 5 m verlängert, die andere – unter Beibehaltung des von den veränderten Seiten eingeschlossenen Winkels – um 5 m verkürzt wird ?

9.0 Die Punkte $A(6/\varphi)$ und $B(2/180° - \varphi)$ mit $\varphi \in]\,0°;\ 180°\,[$ bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O Dreiecke OAB.

9.1 Zeichne die Dreiecke OA_1B_1 für $\varphi_1 = 20°$ und OA_2B_2 für $\varphi_2 = 60°$ in ein Koordinatensystem.

9.2 Stelle den Flächeninhalt $A(\varphi)$ der Dreiecke OAB in Abhängigkeit von φ dar.
[Ergebnis: $A_{(\varphi)} = 6 \cdot \sin 2\varphi$ FE]

9.3 Berechne mit Hilfe des Ergebnisses in 9.2 den Flächeninhalt des Dreiecks OAB für $\varphi = 75°$. Ermittle die kartesischen Koordinaten der Punkte A und B und den Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

9.4 Für welches Winkelmaß φ gilt A = 4,5 FE ?

Trigonometrie - Flächeninhalt von Dreiecken bestimmen

Klasse 10 I

9.5 Zeige mit Hilfe des Ergebnisses in Aufgabe 9.2, dass es kein Dreieck OAB mit mehr als 6 FE Inhalt gibt.

9.6 Begründe algebraisch und geometrisch, dass das flächengrößte Dreieck OAB rechtwinklig ist.

10.0 Die Punkte $A(1/\varphi)$ und $B(1/90^\circ-\varphi)$ beschreiben zusammen mit dem Koordinatenursprung O gleichschenklige Dreiecke OAB.

10.1 Zeichne die Dreiecke OA_1B_1 mit $\varphi_1=20^\circ$ und OA_2B_2 mit $\varphi_2=35^\circ$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 5 cm).
Berechne die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte A_1, A_2, B_1, B_2.

10.2 Begründe, dass man jeweils die kartesischen Koordinaten des Punktes B erhält, wenn man die kartesischen Koordinaten des Punktes A vertauscht.

10.3 Berechne die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte A und B, so dass das Dreieck OAB gleichseitig ist.

10.4 Gib den Flächeninhalt $A(\varphi)$ der Dreiecke OAB in Abhängigkeit von φ an.

[Ergebnis: $A_{(\varphi)}=(\cos^2\varphi-0{,}5)$ FE]

10.5 Für welches Winkelmaß φ gilt A = 0,25 FE ?

10.6 Zeige, dass der Flächeninhalt der Dreiecke OAB innerhalb $D(\varphi)$ nicht größer als 0,5 FE wird. Für welches Winkelmaß φ^* gilt $A(\varphi^*)=0{,}5$ FE ?