

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

1. Drehe die Gerade g mit $y = x - 3$ um $O(0/0)$ mit $\alpha = 45^\circ$. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden g' . Berechne das Maß des Winkels zwischen g und g' .
2. Die Gerade g mit $y = -x + 5$ soll um $O(0/0)$ so gedreht werden, dass die Bildgerade parallel zur x -Achse ist. Bestimme die Gleichung der Bildgeraden sowie das Maß des Drehwinkels (zwei Lösungen).
3. Auf der Normalparabel mit $y = -x^2 + 8x - 10$ wird ein Punkt A gesucht. Er soll Eckpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks ABO sein, wobei $O(0/0)$ und B ein Punkt der y -Achse sein soll. Das gleichschenklige Dreieck hat an der Spitze O das Innenwinkelmaß 45° . Bestimme die Koordinaten von B zeichnerisch und rechnerisch.
- 4.1 Zeige, dass der Punkt $A(4/3)$ durch Drehung um $O(0/0)$ auf den Punkt $A'(-3/-4)$ abgebildet werden kann. Bestimme die Abbildungsgleichung der Drehung und das Drehwinkelmaß α .
- 4.2 Gleiche Aufgabenstellung wie 4.1, aber mit $A'(0/-5)$.
5. Gegeben sind die Geraden g mit $y = -x + 5$ und h mit $x = -2$. Gesucht sind zwei Punkte $A \in g$ und $B \in h$ so, dass $\triangle OAB$ gleichschenkelig-rechtwinklig mit der Spitze $O(0/0)$ wird. Zeichnung !
6. Gegeben ist $Q(5/4)$. Gesucht ist die dritte Ecke R eines gleichseitigen Dreiecks OQR mit $O(0/0)$. Zeichnung !
- 7.0 Gegeben sind die Geraden g_1 durch $y = x + 3$ und g_2 durch $y = -x + 5$. Gesucht ist eine Gerade g_3 durch $O(0/0)$, so dass die durch g_1 und g_2 aus g_3 ausgeschnittene Strecke durch O halbiert wird.
- 7.1 Löse die Aufgabe konstruktiv.
Hinweis: Führe eine Punktspiegelung von g_1 und g_2 an O durch!
- 7.2 Berechne die Gleichung von g_3 .

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 8.0** Gegeben ist der Punkt $P(5/0)$.
- 8.1** Berechne die Koordinaten seines Bildpunktes P' in Abhängigkeit vom Maß α des Drehwinkels bei einer Drehung um $O(0/0)$.
- 8.2** Stelle die Entfernung $e(\alpha) = \overline{PP'}$ in Abhängigkeit von α dar.
 [Ergebnis: $e(\alpha) = (5\sqrt{2}(1 - \cos \alpha))$ cm]
- 8.3** Für welchen Wert von α ist ein Minimum, für welchen ein Maximum für den Graphen von $e(\alpha)$ zu erwarten? Welche Wertemenge ergibt sich für $e(\alpha)$? Begründung!
- 8.4** Welche Symmetrie ist zu erwarten? Begründung!
- 8.5** Tabellarisiere $e(\alpha)$ mit $\Delta\alpha = 10^\circ$ in einem sinnvollen Intervall. Stelle nun $e(\alpha)$ graphisch dar.
- 9.0** Das Dreieck ABC mit $A(-3/-3,5)$, $B(4/0,5)$ und $C(-3/1,5)$ wird an der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x$ gespiegelt.
- 9.1** Zeichne die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sowie die Spiegelachse g im Koordinatensystem.
- 9.2** Gib die Abbildungsvorschrift an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A' , B' und C' .
 [Ergebnis: $A'(1/4,5)$; $B'(2/-3,5)$; $C'(-3/1,5)$]
- 9.3** Zeige rechnerisch, dass sich die Strecken $[AB]$ und $[A'B']$ auf der Geraden g schneiden, und begründe dies geometrisch.
- 9.4** Das Ergebnis 9.2 zeigt, dass der Punkt C ein Fixpunkt ist. Weise dies auf andere Weise nach.
- 10.0** Das Dreieck ABC mit $A(2/-1)$ und $C(4/3)$ wird um den Ursprung $O(0/0)$ mit dem Drehwinkel φ auf das Dreieck $A'B'C'$ mit $B'(2/6)$ und $C'(0/5)$ abgebildet.
- 10.1** Ermittle den Drehwinkel φ zeichnerisch und rechnerisch.
 Gib die Abbildungsgleichung an, und berechne die Koordinaten der Punkte A' und B' .
 [Ergebnis: $\varphi = 53,13^\circ$; $A'(2/1)$; $B'(6/2)$]
- 10.2** Berechne die Winkel BAC und $B'A'C'$, und zeige, dass sie gleich groß sind.
- 10.3** Zeige, dass sich die Geraden BC und $B'C'$ unter dem Drehwinkel φ schneiden.
- 10.4** Das Dreieck ABC wird gegen den Uhrzeigersinn um $O(0/0)$ gedreht, so dass der Punkt B'' auf der x-Achse liegt. Berechne den Drehwinkel ε sowie die Koordinaten der Bildpunkte A'' und C'' .

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 11.0** Die Punkte $A(-3/-4,5)$, $B(4/1)$ und $C(3/4,5)$ sind Eckpunkte eines Drachenvierecks $ABCD$. Symmetrieachse ist AC .
- 11.1** Zeichne das Drachenviereck $ABCD$ (Platzbedarf: $-4 \leq x \leq 5$; $-5 \leq y \leq 5$).
- 11.2** Berechne die Koordinaten des Eckpunktes D .
- 11.3** Welche Bedingung müssen die Koordinaten der Punkte $B_r(x/y)$ erfüllen, so dass die Drachenvierecke AB_rCD_r Rauten sind?
(Ergebnis: $y = -\frac{2}{3}x$)
- 11.4** Berechne mit Hilfe des Ergebnisses in 11.3 die Koordinaten des Punktes D_r der Raute AB_rCD_r mit $B_r(6/y)$.
- 11.5** Zeige rechnerisch, dass die Rauten AB_rCD_r in 11.3 auch zur Geraden B_rD_r symmetrisch sind.
- 12.0** Die Punkte $B(4/-3)$ und $D(0/5)$ sind Eckpunkte des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Seine Symmetrieachse $m_{[AB]}$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.
- 12.1** Zeichne das Trapez $ABCD$ im Koordinatensystem und berechne die Koordinaten der Punkte A und C .
(Ergebnis: $A(-4/3)$; $C(4,8/1,4)$)
- 12.2** Zeige rechnerisch, dass der Mittelpunkt $M_{[BC]}$ des Schenkels $[BC]$ auf den Mittelpunkt $M_{[AD]}$ des Schenkels $[AD]$ gespiegelt wird, und begründe dies mit Hilfe der Satzgruppe der Achsenspiegelung.
- 13.1** Bilde das Dreieck ABC mit $A(-1/-2)$, $B(2/-1)$ und $C(1/2)$ durch Punktspiegelung an $Z_1(-1/2)$ ab. Fertige eine Zeichnung an, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte A' , B' , C' (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 7$; $-3 \leq y \leq 7$).
(Ergebnis: $A'(-1/6)$; $B'(-4/5)$; $C'(-3/2)$)
- 13.2** Bilde das Dreieck $A'B'C'$ aus 13.1 durch Punktspiegelung an $Z_2(1/4)$ ab. Zeichne das Bilddreieck $A'B'C'$ in die Zeichnung zu 13.1 ein, und berechne die Koordinaten der Punkte A'' , B'' und C'' .
- 13.3** Zeige rechnerisch, dass die Verknüpfung der Punktspiegelungen in 13.1 und 13.2 durch eine Parallelverschiebung ersetzt werden kann. Berechne die Koordinaten des Verschiebungsvektors.
- 14.** Der Winkel BAC im Dreieck ABC mit $A(0/0)$, $B(5/2)$ hat das Maß $\alpha = 50^\circ$. Der Eckpunkt C liegt auf der Geraden g mit $y = -\frac{1}{2}x + 7$.
Berechne die Koordinaten des Eckpunktes $C(x/-\frac{1}{2}x + 7)$.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 15.** Im Dreieck ABC gilt $A(0/4)$, $C(1/6)$ sowie $\sphericalangle ACB = 72^\circ$. Der Punkt B liegt auf der Geraden g mit $y = 2x - 8$. Berechne die Koordinaten von B.
- 16.** Der Eckpunkt C des Dreiecks ABC mit $A(-1/-2)$, $B(6/0)$ und $\sphericalangle BAC = 55^\circ$ liegt auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 13$. Welche Koordinaten hat C ?
- 17.0** Das Dreieck ABC mit $A(2/-1,5)$, $B(5/-1,5)$ und $C(3/1)$ wird an der Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x$ gespiegelt, das Bilddreieck $A'B'C'$ danach an der Geraden g_2 mit $y = -2x$.
- 17.1** Fertige eine Zeichnung an (Platzbedarf: $-6 \leq x \leq 6$; $-2 \leq y \leq 6$).
- 17.2** Berechne die Koordinaten der Bildpunkte A' , B' , C' , A'' , B'' , C'' .
- 17.3** Durch welche Abbildung kann man die beiden Spiegelungen ersetzen ?
Gib die Abbildungsgleichung an.
- 17.4** Welche Bedeutung hat der Winkel, den die beiden Achsen g_1 und g_2 miteinander bilden für die Ersatzabbildung ?
- 17.5** Welches Ergebnis erhält man, wenn man das Dreieck ABC aus 17.0 zuerst an g_2 und dann an g_1 spiegelt ?
- 18.0** Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-1/2)$, $B(4/1)$, $C(3/5)$. Es soll durch zentrische Streckung mit $Z_1(0/4)$ und $k_1 = -0,5$ abgebildet werden. Das Bilddreieck $A'B'C'$ soll noch einmal durch zentrische Streckung mit $Z_2(-0,5/6,5)$ und $k_2 = 4$ abgebildet werden.
- 18.1** Zeichne das Dreieck ABC sowie die beiden Bilddreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$
(Platzbedarf: $-7 \leq x \leq 5$; $-6 \leq y \leq 7$).
- 18.2** Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der beiden Bilddreiecke.
- 18.3** Zeige, dass man die beiden zentrischen Streckungen durch eine neue zentrische Streckung mit dem Zentrum Z^* und dem Streckungsfaktor k^* ersetzen kann.
Ermittle Z^* und k^* zeichnerisch und rechnerisch, und gib die Abbildungsgleichung an.
(Teilergebnis: $Z^*(0,5/1,5)$; $k^* = -2$)
- 18.4** Berechne mit Hilfe der Abbildungsgleichung in 18.3 aus den Koordinaten der Punkte A, B, C die Koordinaten der Eckpunkte A'' , B'' , C'' .
- 18.5** Zeige, dass die drei Streckungszentren Z_1 , Z_2 und Z^* auf einer Geraden liegen.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 19.0** Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden $g: y = -2$. Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1 , AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung; $-6 \leq x \leq 8$; $-6 \leq y \leq 6$
- 19.1** Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(-4/-2)$; $B_2(-2/-2)$; $B_3(4/-2)$
- 19.2** Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0,5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0 .
- 19.3** Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $6\sqrt{3}$ FE besitzt.
- 19.4** Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck. Berechne den Flächeninhalt A_{\min} dieses Dreiecks.
- 20.0** Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden $g: x = 4$. Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1 , AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung; $-3 \leq x \leq 8$; $-6 \leq y \leq 7$
- 20.1** Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(4/-5)$; $B_2(4/-3)$; $B_3(4/3)$
- 20.2** Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0,5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0 .
- 20.3** Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $5\sqrt{3}$ FE besitzt.
- 20.4** Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck. Berechne den Flächeninhalt A_{\min} dieses Dreiecks.
- 21.0** Eine Dreiecksschar besteht aus gleichseitigen Dreiecken AB_nC_n mit $A(0/0)$. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden $g: y = \sqrt{3} \cdot x - 1$. Zeichne die Schardreiecke AB_1C_1 , AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung; $-5 \leq x \leq 5$; $-6 \leq y \leq 8$
- 21.1** Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n für $B_1(-2/?)$; $B_2(-0,5/?)$; $B_3(4/?)$
- 21.2** Der Eckpunkt C_0 des Schardreiecks AB_0C_0 liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = 0,5x + 1$. Berechne die Koordinaten von B_0 und C_0 .
- 21.3** Berechne die Eckpunktskoordinaten des Schardreiecks, das den Flächeninhalt $9\sqrt{3}$ FE besitzt.
- 21.4** Die Dreiecksschar enthält ein flächenkleinstes Schardreieck. Berechne den Flächeninhalt A_{\min} dieses Dreiecks.

Abbildungen im Koordinatensystem

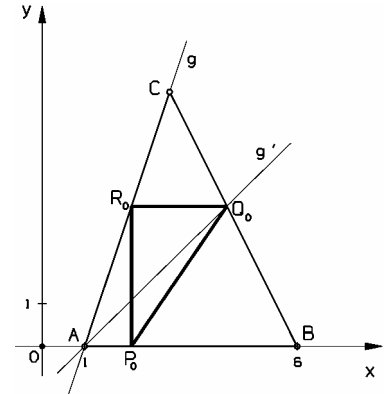
Klasse 10 I

- 22.** Die gleichschenkligen Dreiecke AB_nC_n mit $A(0/0)$, $\overline{AB_n} = \overline{AC_n}$ und $\sphericalangle B_nAC_n = \alpha$ bilden eine Dreiecksschar. Die Eckpunkte B_n liegen auf der Geraden g . Fertige jeweils eine Zeichnung an, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte C_n . Berechne sodann die Eckpunktskoordinaten der Schardreiecke $AB'C'$, deren Eckpunkt C' auf der Parabel p liegt.
- a) $\alpha = 45^\circ$; $g: y = -x + 4\sqrt{2}$; $p: y = x^2 - 2x - 4$
 b) $\alpha = 90^\circ$; $g: y = -2x - 3$; $p: y = -x^2 + 5$
 c) $\alpha = 120^\circ$; $g: x = -4$; $p: y = -x^2 + 4x - 2$
- 23.** Der Punkt $C(0/0)$ ist Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken mit $\sphericalangle ACB = 135^\circ (90^\circ)$ und $\overline{AC} = \overline{BC}$, deren Eckpunkte A und B auf den Geraden g_1 mit $y = \frac{1}{2}x - 4$ und g_2 mit $y = 2x + 4$ liegen.
- a) $A \in g_1 \wedge B \in g_1$
 b) $A \in g_2 \wedge B \in g_2$
 c) $A \in g_1 \wedge B \in g_2$
 d) $A \in g_2 \wedge B \in g_1$
- Konstruiere die Dreiecke, und berechne sodann die Koordinaten der Punkte A und B auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.
- 24.1** Die Punkte $A(-2/3)$ und $C(6/-3)$ sind Eckpunkte von Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n , die $[AC]$ als gemeinsame Diagonale besitzen. Die Eckpunkte D_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 3x - 1$. Trage die Punkte A und C , die Gerade g und die auf g liegenden Punkte $D_1(1/y_1)$ und $D_2(-1,5/y_2)$ in ein Koordinatensystem ein, und zeichne sodann die Parallelogramme AB_1CD_1 und AD_2CB_2 .
- 24.2** Begründe, dass für die Punkte B_n die Gleichung $\overline{OB_n} = \overline{OA} \oplus \overline{D_nC}$ und $D_n \xrightarrow{M} B_n$ mit M als Mittelpunkt der Strecke $[AC]$ gilt. Berechne mit beiden Abbildungen die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte B_n , und zeichne ihn in das Diagramm zu 24.1 ein.
- 24.3** Prüfe, ob es unter den Parallelogrammen AB_nCD_n bzw. AD_nCB_n Rechtecke und Rauten gibt, berechne gegebenenfalls die Koordinaten der Eckpunkte D_n , und trage diese Parallelogramme in die Zeichnung zu 24.1 ein.
- 24.4** Für welche Parallelogramme AB_nCD_n gilt $\overline{AD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{D_nC}$? Berechne die Koordinaten der Punkte D_n .
- 25.** Das Dreieck ABC mit $A(2/5)$, $B(5/2)$ und $C(7/7)$ und die Gerade g mit $y = 3x$ sind gegeben. Es gibt Rauten, deren eine Diagonale auf g liegt und doppelt so lang wie die andere Diagonale ist, die einen Punkt auf einer Seite des Dreiecks ABC mit einem Punkt auf der y -Achse verbindet. Konstruiere die Rauten, und berechne dann die Koordinaten ihrer Eckpunkte. Platzbedarf: $-3 \leq x \leq 8$; $-1 \leq y \leq 13$

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

26. Es sind ein Dreieck ABC mit A(1/0), B(6/0), C(3/6) und eine Schar ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke $P_nQ_nR_n$ mit $\overline{P_nR_n} : \overline{R_nQ_n} = 3 : 2$ und $\sphericalangle P_nR_nQ_n = 90^\circ$ gegeben. Die Eckpunkte R_n liegen auf der Geraden AC = g; die Seiten $[P_nR_n]$ stehen auf der x-Achse senkrecht. Ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte Q_n . Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte des Schardreiecks $P_0Q_0R_0$, das dem gegebenen Dreieck ABC einbeschrieben ist. Lösungshinweis: $g \xrightarrow{x\text{-Achse}; \varphi} g'$; $\tan \varphi = -\frac{2}{3}$

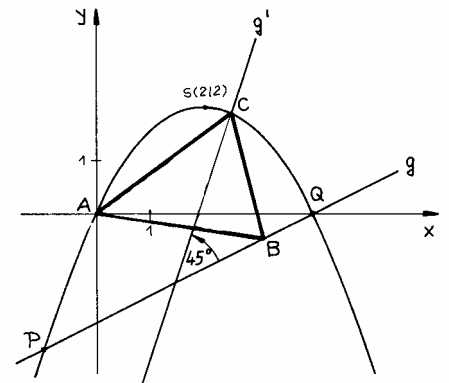


27. Zwischen der Parabel p mit $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ und der Geraden $g = PQ$ mit P(-1/-2,5) und Q(4/0) ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit A(0/0) und $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ einbeschrieben.

a) Ermittle zunächst die Gleichung der Geraden g' und berechne damit die Koordinaten der Eckpunkte B und C.

b) Begründe sodann, dass $\overline{AB} \xrightarrow{A; \varphi=45^\circ} \overline{AC}$ und somit $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \frac{1}{2}\bar{x} - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A; \varphi=45^\circ} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{pmatrix}$ gilt und

berechne so die Koordinaten der Punkte $B(\bar{x} / \frac{1}{2}\bar{x} - 2)$ und $C(x / -\frac{1}{2}x^2 + 2x)$.



28. Dem Bereich mit $y \geq 0 \wedge y \geq -2x - 10 \wedge y \leq -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ sollen Drachenvierecke AB_nCD_n einbeschrieben werden, so dass $B_n \in p$ mit $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ und $D_n \in g$ mit $y = -2x - 10$ gilt. Die Punkte A(0/0) und C(-6/3) liegen auf der gemeinsamen Symmetrieachse der Vierecke.

Konstruiere die Drachenvierecke, und berechne die Koordinaten der Punkte B_n und D_n auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

Für die Zeichnung: $-9 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 6$

29. Die Parabeln p_1 mit $y = x^2 + 2x - 1$ und p_2 mit $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3$ schneiden sich in den Punkten A und B. Der Punkt A ist Büschelpunkt eines Geradenbüschels. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B und ermittle die Gleichung der Büschelgeraden, aus der beide Parabeln gleichzeitig Sehnen ausschneiden, deren Längen sich wie 2:1 verhalten.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 30.1** Die Eckpunkte C_n der Dreiecke ABC_n mit $A(0/0)$ und $B(6/0)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x + 6$. Ermittle die Gleichung der Trägergraphen der Mittelpunkte der Seiten $[AC_n]$ und $[BC_n]$ sowie der Schwerpunkte der Dreiecke ABC_n .
- 30.2** Eines der Dreiecke ABC_n besitzt den kleinsten möglichen Umfang. Berechne die Koordinaten des zugehörigen Eckpunktes C_n .
- 31.** Eine Dreiecksschar besteht aus gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit $A_n(x/0)$, $C_n(x/2x+2)$ und $\overline{A_nB_n} = \overline{B_nC_n}$. Zeichne die Schar dreiecke für $x \in \{-2,5; 1; 3\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichungen der Trägergraphen der Mittelpunkte M_n der Seiten $[A_nC_n]$ und der Eckpunkte B_n . Berechne sodann die Koordinaten des dem Dreieck PQR mit $P(-1/0)$, $Q(7,5/0)$ und $R(4/10)$ einbeschriebenen Schar dreiecks $A_0B_0C_0$.
- 32.** Die ähnlichen Dreiecke P_nQR_n mit $Q(0/0)$, $P_n(x - \frac{1}{2}x + 5)$, $\sphericalangle R_nQP_n = 90^\circ$ und $\overline{P_nQ} : \overline{R_nQ} = 2 : 1$ bilden eine Dreiecksschar. Auf welchem geometrischen Ort liegen alle Eckpunkte R_n ? Ermittle seine Gleichung. Welches Schar dreieck besitzt den kleinsten Flächeninhalt?
- 33.** Der Punkt $A(0/0)$ ist Eckpunkt eines Quadrates $ABCD$ mit $C(-3/?)$ und $D(x/x-4)$. Konstruiere das Quadrat und berechne die Koordinaten der Eckpunkte B , C und D . Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 7$; $-6 \leq y \leq 4$
- 34.0** Das Dreieck ABC mit $A(-1,5/2)$, $B(1/-0,5)$ und $C(2,5/5)$ soll durch Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden so abgebildet werden, dass der Punkt A' auf der x -Achse liegt.
- 34.1** Ermittle zeichnerisch die beiden möglichen Spiegelachsen g_1 und g_2 sowie die beiden Bild dreiecke.
- 34.2** Ermittle rechnerisch die Spiegelungsmatrizen, und berechne die Koordinaten der Bildpunkte.
- 34.3** Gib die Gleichungen der beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 an, und bestätige mit ihrer Hilfe, dass einmal der Punkt C , das andere Mal der Punkt B ein Fixpunkt ist.
- 34.4** Zeige, dass die beiden Spiegelachsen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander stehen, und begründe dies.
- 34.5** Zeige rechnerisch, dass man das Dreieck $A'B'C'$ durch eine Punktspiegelung am Ursprung $O(0/0)$ auf das Dreieck $A''B''C''$ abbilden kann. Begründe dies.

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 35.0** Die Punkte $A(x/0)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$, $B(6/4)$ und C sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken ABC mit der Basis $[AC]$ und mit OB als Symmetrieachse.
- 35.1** Zeichne die Dreiecke A_1BC_1 , A_2BC_2 und A_3BC_3 mit $x \in \{2; 3,5; 6\}$ in ein Koordinatensystem.
- 35.2** Berechne die Koordinaten der Punkte C für die in 35.1 gezeichneten Dreiecke.
- 35.3** Die Punkte A_n beschreiben eine Strecke, die auf der x -Achse liegt. Bestimme das Intervall für x . Ermittle rechnerisch die Gleichung der Geraden, auf der die Punkte C liegen, und gib auch für deren Rechtswerte ein Intervall an.
- 35.4** Ermittle x , so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und berechne die Koordinaten von C .
- 35.5** Ermittle x , so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist, und berechne die Koordinaten von C .
- 35.6** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A_0BC_0 mit $A_0(2,5/0)$, und ermittle die Koordinaten des Dreiecks A_4BC_4 , das den gleichen Flächeninhalt besitzt.
- 36.0** Gegeben sind die Punkte $A(x/-1)$ und $B(0/10-x)$ mit $0 \leq x < 10$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Punkte B werden an der Geraden g mit $y = -\frac{2}{3}x$ gespiegelt. Es entstehen Dreiecke ABB' .
- 36.1** Zeichne die Dreiecke ABB' für $x \in \{5; 7,5; 9\}$ in ein Koordinatensystem.
- 36.2** Berechne die Koordinaten der Eckpunkte der in 36.1 gezeichneten Dreiecke ABB' .
- 36.3** In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit $[BB']$ als Basis. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.
- 36.4** Berechne die Belegung für x , mit der sich ein gleichschenkliges Dreieck mit $[B'A]$ als Basis ergibt.
- 36.5** In der Schar der Dreiecke ABB' gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $[B'A]$. Berechne die Koordinaten seiner Eckpunkte.
- 36.6** Gib die Koordinaten der Punkte B' in Abhängigkeit von x an.
[Ergebnis: $B'(0,9x-9,2/0,4x-3,8)$]
- 36.7** Bestimme mit Hilfe des Ergebnisses in 36.6 den Flächeninhalt $A(x)$ der Dreiecke ABB' in Abhängigkeit von x .
[Ergebnis: $A(x) = (-0,2x^2 - 2,8x + 50,6)$ FE]
- 36.8** Welche Belegung für x ergibt das flächengrößte Dreieck ?

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

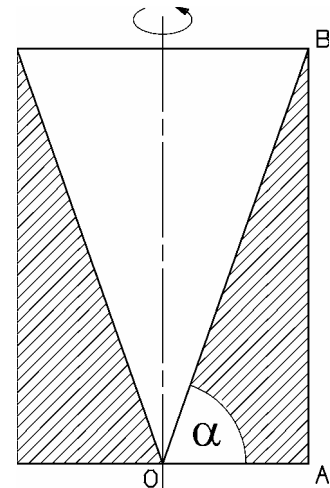
- 37.0** Die Dreiecke ABC mit $A(1/-1)$, $B(2/0)$, $C(-1/3)$ und $A'B'C'$ mit $A'(1/0,5)$, $B'(3,5/3)$, $C'(-4/10,5)$ sind gegeben.
- 37.1** Zeichne die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in ein Koordinatensystem.
- 37.2** Zeige, dass man das Dreieck ABC durch zentrische Streckung auf das Dreieck $A'B'C'$ abbilden kann. Ermittle rechnerisch das Streckungszentrum Z und den Streckungsfaktor k.
- 37.3** Das Dreieck ABC soll von $Z(1/-2)$ aus gestreckt werden, so dass der Mittelpunkt M'' der Dreiecksseite $[B''C'']$ auf der y-Achse liegt. Berechne den Streckungsfaktor k'' und die Koordinaten der Eckpunkte A'' , B'' , C'' .
- 37.4** Die Eckpunkte der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und $A''B''C''$ liegen jeweils auf einer der Parabeln p , p' , p'' . Bestimme die Parabelgleichungen, und zeichne die Parabeln in die Zeichnung zu 37.1 ein.
- 37.5** Ermittle den Streckungsfaktor k^* , so dass das Dreieck $A^*B^*C^*$ den Flächeninhalt $A = 35$ FE erhält.
- 38.0** Punkte $B(x/y)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 16$ legen zusammen mit den Punkten $O(0/0)$ und $A(x/0)$ für $x \in]0; 8[$ eine Schar von rechtwinkligen Dreiecken OAB fest. Der Winkel AOB hat das Maß α mit $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ[$.
- 38.1** Zeichne die Gerade g sowie die Dreiecke OA_1B_1 für $A_1(6/0)$, OA_2B_2 für $\alpha = 75^\circ$ und OA_3B_3 für $B_3(x_3/13)$ in ein Koordinatensystem mit 1 cm als Längeneinheit. Berechne jeweils α in den Dreiecken OA_1B_1 und OA_3B_3 .
- 38.2** Zeige, dass zwischen dem Abszissenwert x der Dreieckseckpunkte A bzw. B und α die Beziehung $x = \frac{16}{2 + \tan \alpha}$ besteht und berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und B_2 .
- 38.3** Bestätige durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke OAB in Abhängigkeit von α gilt: $A(\alpha) = 128 \cdot \frac{\tan \alpha}{(2 + \tan \alpha)^2} \text{ cm}^2$.
- 38.4** Ermittle α und dann die Koordinaten der Dreieckseckpunkte A und B im Falle $A = \frac{128}{9} \text{ cm}^2$. Auf welche Dreiecksform gelangt man dabei?
- 38.5** Bestätige durch Rechnung die folgenden Termumformungen:
- a)
$$\frac{\tan \alpha}{(2 + \tan \alpha)^2} = \frac{1}{\frac{4}{\tan \alpha} + \tan \alpha + 4} = \frac{1}{\left(\frac{4}{\tan \alpha} + \tan \alpha\right) + 4}$$
- b)
$$\frac{4}{\tan \alpha} + \tan \alpha = \tan \alpha + \frac{4}{\tan \alpha} = \left(\sqrt{\tan \alpha} - \frac{2}{\sqrt{\tan \alpha}}\right)^2 + 4 = T(\alpha)$$
- 38.6** Für welchen Winkel α_0 nimmt der Term $T(\alpha)$ einen minimalen Wert an?

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 38.7** Begründe, dass für α_0 das zugehörige Dreieck OA_0B_0 unter allen Dreiecken OAB den größten Flächeninhalt besitzt, und gib diesen an. Berechne die Koordinaten der Punkte A_0 und B_0 , und zeichne das Dreieck OA_0B_0 ein.
- 38.8** Zeichne das Dreieck OA^*B^* ein, das unter allen Dreiecken OAB die kürzeste Hypotenuse besitzt, und berechne α^* sowie die Koordinaten der Punkte A^* und B^* .
- 38.9** Von welcher Art sind die Rotationskörper, die entstehen, wenn die Dreiecke OAB um die y -Achse rotieren?
Siehe dazu nebenstehende Skizze,
- 38.10** Bestätige, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von α gilt:

$$V = \frac{8192}{3} \cdot \pi \cdot \frac{\tan \alpha}{(2 + \tan \alpha)^3} \text{ cm}^3.$$
- 38.11** Stelle zu V eine numerische Wertetabelle auf ($\Delta \alpha = 5^\circ$), und zeichne den Graphen zu V . Wähle auf der α -Achse 1 cm für 10° , auf der V -Achse 1 cm für 20 cm^3 .
- 38.12** Entnimm dem Graphen in 38.11 den Wert α , der zum volumengrößten Rotationskörper gehört.
Nimm Stellung zu der Aussage: „Der zum flächengrößten Dreieck OAB gehörende Rotationskörper hat das größte Volumen“.



- 39.** Dem durch $y \leq \sqrt{3}(x-3) + 6 \wedge y \leq -\sqrt{3}(x-3) + 6 \wedge y \geq 0$ beschriebenen Bereich sollen ein gleichseitiges Dreieck ABC und ein gleichschenkliges Dreieck AB_0C_0 mit $\sphericalangle B_0AC_0 = 45^\circ$ und $A(0/0)$ einbeschrieben werden.
Zeichne den gegebenen Bereich in ein Koordinatensystem, und ermittle die gesuchten Dreiecke zunächst geometrisch. Berechne sodann die Koordinaten der Eckpunkte B , C , B_0 und C_0 auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.
- 40.** Auf der Parabel p mit $y = x^2 - 6x + 12$ liegen die Eckpunkte C_n der Dreiecke AB_nC_n mit $A(-3/0)$, $B(x/0)$ und $C_n(x/x^2 - 6x + 12)$. Ermittle die Gleichungen der geometrischen Ortslinien der Mittelpunkte M_n der Seiten $[B_nC_n]$ und der Dreiecksschwerpunkte S_n .

Abbildungen im Koordinatensystem

Klasse 10 I

- 41.1** Bei einer Abbildung werden die Punkte $P(x/y)$ auf die Punkte $P'(x+2y/y)$ abgebildet. Zeige, dass diese Abbildung geradentreu ist, und gib ihre Abbildungsvorschrift in der Matrixschreibweise an.
- 41.2** Die Eckpunkte $D_n(x/x+3)$ einer Schar von Rechtecken $A_nB_nC_nD_n$ mit $A_n(x/0)$ werden durch die in 41.1 gegebene Abbildung auf die Eckpunkte C_n abgebildet. Zeichne die Rechtecke für $x \in \{-2; -1; 2\}$ in ein Koordinatensystem, und ermittle die Gleichung des geometrischen Ortes der Eckpunkte C_n .
Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 9; -2 \leq y \leq 9$
- 41.3** Das Rechteck $A_0B_0C_0D_0$ der Rechtecksschar ist dem Dreieck PQR mit $P(-3/0)$, $Q(7,5/0)$ und $R(4/7)$ einbeschrieben. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte dieses Rechtecks.
- 42.** Das Dreieck ABC mit $A(2/1)$, $B(6/3)$ und $C(5/6)$ wird auf das Dreieck $A'B'C'$ mit $A'(-1/2)$, $B'(-3/6)$ und $C'(-0,4/7,8)$ abgebildet. Ermittle die Abbildungsgleichung in der Matrixform, und gib an, um welche Abbildung es sich handelt. Welche Gerade ist Fixpunktgerade und welche Geraden sind Fixgeraden?
- 43.** Die Gerade g_1 mit $y = \frac{4}{3}x + 3$ soll so gedreht werden, dass sie auf die Gerade g_2 mit der Gleichung $y = -\frac{3}{4}x$ fällt. Dabei soll jedoch gleichzeitig der Punkt $A_1(3/7)$ auf der Geraden g_1 auf den Punkt $A_2(0/0)$ auf der Geraden g_2 abgebildet werden. Berechne die Koordinaten des Drehzentrums und das Maß des Drehwinkels.