

2. Mathematikschulaufgabe

Klasse 11

1. a) Die Zahl $-5 + 12i$ ist das Quadrat einer komplexen Zahl $z = a + i b$. Bestimme diese Zahl. Ist die Lösung eindeutig ?
- b) Stelle folgende komplexe Zahl in Polarform dar: $z = -1 - \sqrt{3} i$
- c) Führe folgende komplexe Zahl in die Normalform $a + i b$ über: $\sqrt{3} \cdot E\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. Zeige dass für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + i b$ gilt: $\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} = \frac{4 \cdot i \cdot \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)}{|z|^2}$
3. Für die Multiplikation komplexer Einheitsvektoren $E(\alpha)$ und $E(\beta)$ gilt: $E(\alpha) \cdot E(\beta) = E(\alpha + \beta)$. Beweise diese Aussage !
Anleitung:
 Verwandle dazu zunächst die Einheitsvektoren mit Hilfe der Gleichung $E(\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Durch die anschließende Multiplikation erhält man einen komplizierten Term mit vielen Sinus- und Kosinusaussdrücken. Diesen Term kann man mit Hilfe der **Additionstheoreme** für Sinus und Kosinus vereinfachen.
 Benutze die Formelsammlung !
4. a) Untersuche ohne den Graphen zu zeichnen die Funktion auf ihr Monotonieverhalten.

$$f : x \mapsto \begin{cases} -x^2 + 2; & x \in [0; 1] \\ \frac{1}{x}; & x \in]1; \infty[\end{cases}$$
- b) Begründe, warum f umkehrbar ist und bestimme die Umkehrfunktion, ihre Definitions- und Wertemenge !

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + 2; \quad x \in]0; \infty[$$
- c) Zeichne ohne Rechnung und nur mit Hilfe der Sinus-Schablone die Funktionsgraphen der Funktionen $\sin(x)$ und $\sin(x + 2) + 1$ in ein Koordinatensystem ein $[-4 \leq x \leq 4; \quad -1 \leq y \leq 3]$.
- d) Welche der beiden Aussagen ist richtig, welche ist falsch ? Begründe die Antwort kurz in Worten (Tipp: Überlegung anhand zweier geeigneter Skizzen !)
- (1) „Gilt für eine Funktion $f(-x) = f(x)$, so ist ihr Graph achsensymmetrisch zur y-Achse !“
- (2) „Gilt für eine Funktion $f(-x) = -f(x)$, so ist ihr Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung !“