Gymnasium

4. Mathematikschulaufgabe

Klasse 11

1. a) Zeichne die Gerade g und den Punkt z_0 und entscheide durch Rechnung, ob $z_0 \in g$ ist ! $g = \left\{ z = (2-i) + (1-i)t \;\middle|\; -\infty < t < +\infty \right\}$; $z_0 = 4 - 3\,i$

b) Gegeben sind die Mengen $M_1 = \left\{ z \;\middle|\; |z-1| \le 3 \right\}$ und $M_2 = \left\{ z \;\middle|\; |z+i| < 2 \right\}$.

Drücke die Menge $A = \left\{ z \;\middle|\; |z-1| > 3 \wedge |z+i| < 2 \right\}$ als Differenzmenge durch M_1, M_2 und $\mathbb{C}$ aus !

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x^2-1}}$ mit $ID_f = \left]1;\ \sqrt{1+\pi}\right[$.

Zeige: $f'(x) = \dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{2\sqrt{x^2-1}\sqrt{\sin\sqrt{x^2-1}}}$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3(x-3)}{(x-1)^2}$.

a) Gib die Definitionsmenge von f an !

b) Untersuche die Funktion auf Achsensymmetrie zur y-Achse und auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung !

c) Gib ohne Rechnung die Nullstellen der Funktion an !

d) Berechne $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$.

e) Untersuche das Verhalten der Funktion für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$!

f) Markiere in einem Koordinatensystem alle Bereiche, in denen der Graph von f nicht verläuft (Methode des Felderabstreichens) !

Skizziere den Graphen in das Koordinatensystem.

Platzbedarf: (l; r; o; u) = (-2; 5; 7; 7)

g) Zeige, dass für die erste Ableitung gilt: $f'(x) = \dfrac{x^2(2x^2-7x+9)}{(x-1)^3}$

und gib die Nullstellen der ersten Ableitung an !

h) Zeige, dass für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) = \dfrac{2x(x^3-4x^2+6x-9)}{(x-1)^4}$.

Zeige außerdem, dass die Nullstellen der zweiten Ableitung mit den beiden Nullstellen der Funktion übereinstimmen und dass es keine weiteren Nullstellen der zweiten Ableitung gibt !

i) Wie verläuft der Graph von f an den Stellen x = 0, x = 1 und x = 3 ?
Begründe die Antwort !