

# 1. Mathematikschulaufgabe

Klasse 12

## Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion  $f$  durch die Gleichung  $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^3 + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}; a \in \mathbb{R}$

- Bestimme  $a$  so, dass  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  stetig ist und zeige, dass  $f$  in diesem Fall auch differenzierbar ist.
- Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[-1; 1]$  für  $a = 1$ .

## Aufgabe 2:

Gegeben ist eine Funktion  $f$  durch die Gleichung  $f(x) = 9 - x^2$  im Intervall  $I = [0; b]$  mit  $0 \leq b \leq 3$ .

- Zerlege das Intervall  $I$  in  $n$  äquidistante Teilintervalle und berechne die zugehörige Untersumme  $U_n$  für allgemeines  $b$ . Fertige hierzu eine Zeichnung mit 4-facher Intervallunterteilung für  $b = 2$  an.

$$\text{Hilfsformel: } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- Berechne für  $b = 2$  und  $n = 100$  den Wert der Untersumme  $U_{100}$  aus 2 a) bis auf 5 Dezimalstellen genau.
- Berechne den exakten Wert des Flächeninhalts im Intervall  $[0; 2]$  mit Hilfe eines entsprechenden Integrals.  
Um wie viel Prozent weicht der Wert der Untersumme  $U_{100}$  aus 2 b) vom exakten Wert ab ?
- Beweise mit dem Verfahren der vollständigen Induktion die Hilfsformel aus 2 a).

## Aufgabe 3:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $f$  dritten Grades ist zum Punkt  $O(0/0)$  punktsymmetrisch, schneidet die  $x$ -Achse in  $P(4; 0)$  und schließt im 1. Feld mit der  $x$ -Achse eine Fläche von 64 Flächeneinheiten ein.

- Bestimme die Gleichung der Funktion  $f$ .  
[ Zwischenergebnis:  $f(x) = -x^3 + 16x$  ]
- Untersuche  $f$  auf Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen und skizziere den Graphen von  $f$ .
- Bestimme einen Punkt  $Q$  des Graphen von  $f$ , dessen Verbindungsstrecke mit  $O(0/0)$  die oben angegebene Fläche halbiert.