2. Mathematikschulaufgabe

Klasse 12

Aufgabe 1:

Gegeben sei für k > 0 die Funktionenschar f_k durch die Gleichung

$$f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2k^2 + \frac{2k^2}{x^2}.$$

a) Untersuche f_k auf Symmetrie, Nullstellen, Polstellen und Asymptoten.

b) Untersuche f_k auf Extrem- und Wendepunkte und bestimme die Ortskurve aller Tiefpunkte.

c) Zeichne das Schaubild von f_k für k = 2 im Bereich $-5 \le x \le 5$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und einer Wertetabelle.

d) Das Schaubild von f_2, die Gerade x = 1 und das Schaubild von $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ begrenzen ein Flächenstück, das bis ins Unendliche reicht.
Untersuche, ob dieses Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

e) Zeige, dass die Schaubilder aller Kurvenscharen genau zwei Punkte gemeinsam haben.

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Funktion f durch die Gleichung f(x) = 1 + sin(2x) mit $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f heißt G_f.

a) Untersuche G_f auf Nullstellen, Extrem- und Wendestellen und bestimme die Periode der Funktion f.

b) Zeichne G_f im Bereich $0 \le x \le \pi$.

c) Bestimme die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P\left(\frac{\pi}{2};\, 1\right)$.

Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen der Tangente und G_f im Intervall $\left[0;\, \frac{\pi}{2}\right]$!

d) Betrachte nun die Funktionenschar f_a, die durch die Gleichung $f_a(x) = 1 + \sin(ax)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und a > 0 gegeben ist.
$P\left(\frac{\pi}{a};\, 1\right)$ und Q (0 / 1) sind Punkte auf dem Schaubild von f_a.
Ermittle den Wert des Parameters a für den Fall, dass die Tangenten in P und Q an dem Schaubild von G_a aufeinander senkrecht stehen !

Aufgabe 3:

Bestimme folgende Grenzwerte !

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(2x-\pi)\tan x\right]$