

4. Mathematikschulaufgabe - Leistungskurs

Klasse 12

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{1-x^2}{2(2-x)}$.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit beiden Koordinatenachsen und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücke.
 - Zeigen Sie, dass (für $x \neq 2$) gilt: $\frac{1-x^2}{2(2-x)} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2(2-x)} + 1$. Begründen Sie, dass G_f für $|x| = \infty$ eine Asymptote hat. Für welche Werte von x verläuft G_f oberhalb dieser Asymptote?
 - bestimmen Sie die x -Koordinaten der Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente.
 - Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der erhaltenen Ergebnisse (LE 2cm, $-4 \leq x \leq 5$, $-2 \leq y \leq 6$, Asymptoten einzeichnen).
2. a) Ein Computernetzwerk wird von zwei Großrechnern versorgt, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die Lieferfirma verpflichtet sich, im ersten Betriebsjahr für jeden der Rechner beim ersten Ausfall die Reparaturkosten von 9750 EUR zu übernehmen. Wie hoch muss die Firma die zu erwartenden Reparaturkosten kalkulieren, wenn die auf ein Jahr bezogene Ausfallwahrscheinlichkeit für jeden der Rechner erfahrungsgemäß 5% beträgt?
- b) Eine Versicherung leistet gegen eine Jahresprämie von 6000 EUR im Falle einer Zerstörung von Serveranlagen durch Brand einmalig eine Million EUR Schadenersatz und will dabei einen mittleren Jahresgewinn von 400 EUR pro Vertrag erzielen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit eines Brandes im Jahr rechnet die Versicherung?
3. Sei Z eine Zufallsgröße. Zeigen Sie:
 $\text{Var}(Z) = 0 \Rightarrow Z$ nimmt nur einen einzigen Wert an.
4. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 16 = 0$.
- Der Wert von a soll so bestimmt werden, dass g echt parallel zu E ist.
5. Was kann man über die Lage folgender Geraden g bezüglich des Koordinatensystems aussagen? (Fallunterscheidung!)

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. Geben Sie jeweils eine parameterfreie Darstellung (mit ganzzahligen Koeffizienten) einer Ebene E mit den gewünschten Eigenschaften an:
- E parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene um $7/5$ nach unten verschoben
 - E echt parallel zur x_1 -Achse, aber nicht parallel zur $x_1 - x_3$ -Ebene
 - E enthält die x_3 -Achse, ist aber keine Koordinatenebene