

2. Mathematikschulaufgabe - Leistungskurs

Klasse 12

Analysis:

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = k \cdot x - \ln(k \cdot x)$ mit $k > 0$ und maximaler Definitionsmenge $ID_k = \mathbb{R}^+$.
 - a) Untersuche das Verhalten von $f_k(x)$ für $x \rightarrow 0_+$ und $x \rightarrow +\infty$!
 (Hinweis: Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f_k(x)} = +\infty$ ist und begründe damit kurz, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$ gilt !)
 - b) Bestimme die Teilbereiche von ID_k , in denen $f_k(x)$ streng monoton zu- bzw. streng monoton abnimmt !
 - c) Entscheide allein mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, ob $f_k(x)$ relative Extrema besitzt ! Bestimme gegebenenfalls die Art und Lage dieser Extrema !
 - d) Zeichne den Graphen $f_1(x)$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Intervall $]0; 5[$! (1 LE = 1 cm)
 - e) Zeige mit Hilfe der partiellen Integration, dass $\int \ln x \, dx = -x + x \ln x + C$ gilt !
 - f) Die Geraden mit der Gleichung $x = c$ ($0 < c < 1$) und $x = 1$ schließen mit dem Graphen der Funktion $f_1(x)$ eine Fläche ein. Berechne dieses Flächenstück !

Analytische Geometrie:

2. Untersuche, ob folgendes Gleichungssystem über \mathbb{R} eindeutig lösbar ist und gib gegebenenfalls mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösungsmenge an !

$$(1) \quad 9x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3;$$

$$(2) \quad 12x_1 - x_2 + 12x_3 = 6;$$

$$(3) \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -4;$$

3. Im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 sind folgende Vektoren gegeben:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t+4 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimme t so, dass $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_t$ linear abhängig sind und bestimme die Dimension von V (von t abhängig) !
 - b) $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_t\}$ ist ein Erzeugendensystem des Vektorraums V .
4. Gegeben ist ein Viereck durch die Punkte $A(2; 1; 0)$, $B(10; 3; 8)$, $C(8; 5; 6)$ und $D(4; 3; 2)$. Zeige mit Hilfe der Determinantenrechnung, dass das Viereck $ABCD$ eine ebene Figur ist !

Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner

Arbeitszeit: 90 Minuten