1. Mathematikschulaufgabe

Klasse 11 / G8

1. Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f_k(x) = x^4 - 8kx^2 + 12$; $k \in \mathbb{R}$ mit dem Parameter k.
Für welche Werte von k hat der Graph der Funktion drei, zwei, eine oder keine waagerechte Tangente(n)? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 2;\quad x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

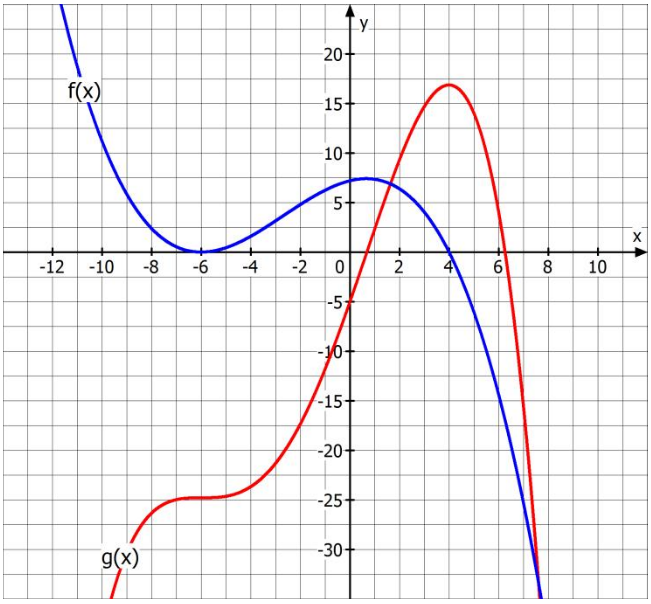
a) Berechnen Sie den Hoch- und den Tiefpunkt von G_f.

b) Bestimmen Sie die Nullstelle mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet.

c) Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f durch $P(2|1)$ noch einen weiteren gemeinsamen Punkt Q mit dem Graphen hat.

d) Wie lautet die Gleichung der Normalen in $P(2|1)$?

3. Gegeben ist der wesentliche Ausschnitt zweier Graphen der Funktionen f(x) und g(x) mit $D = \mathbb{R}$. Beide Funktionen sind ganzrational.



a) Warum kann g(x) eine mögliche Stammfunktion von f(x) sein?

b) Gegeben sei nun die Funktion
$h(x) = -\frac{1}{20}(x+6)^2(x-4);\; D = \mathbb{R}$
Bestimmen Sie für h(x) diejenige Stammfunktion H(x), die durch den Punkt $A(2|10)$ verläuft.

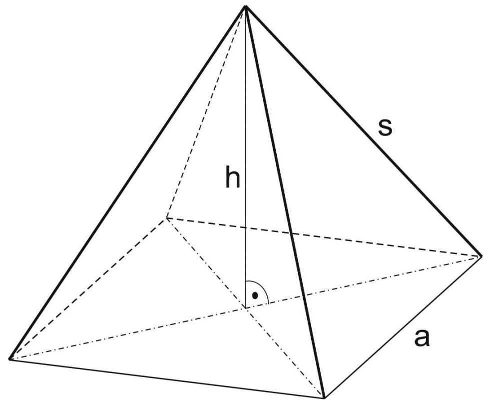
4. Finden Sie eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion, die folgende Eigenschaften aufweist und skizzieren Sie Ihren Vorschlag.

- Der Graph der Funktion hat mehr als eine Nullstelle und verläuft durch den Punkt $O(0|0)$, und
- der Graph ist keine zusammenhängende Kurve, sondern besteht aus drei voneinander getrennten Abschnitten, und
- der Graph besitzt zwei senkrechte Asymptoten $x = -1$ und $x = 3$; es sind jeweils Polstellen mit Vorzeichenwechsel, und
- die waagerechte Asymptote liegt bei $y = -2$.

1. Mathematikschulaufgabe

Klasse 11 / G8

5. Vier Stangen der gleichen Länge s können in Form einer vierseitigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufgebaut werden.



Die Pyramidenhöhe und die Grundfläche sind direkt voneinander abhängig; je größer die Grundfläche, umso geringer die Höhe der Pyramide (und umgekehrt).

Die Pyramide soll ein **maximales** Volumen aufweisen.

Variante A: Berechnen Sie die Pyramidenhöhe h (in Abhängigkeit von s)

Variante B: Berechnen Sie die Länge einer Quadratseite a (in Abhängigkeit von s)

Berechnen Sie auch das maximale Pyramidenvolumen

Bemerkung:

Das Volumen der „Stangenpyramide“ ist dann Null, wenn

a) die Pyramidenhöhe Null ist, d. h., die Stangen liegen ausgebreitet am Boden.

b) die Pyramidenhöhe gleich s ist, d. h., die 4 Stangen stehen senkrecht zusammen.

Zwischen diesen beiden „Grenzfällen“ $V = 0$ muss es ein Volumen geben, das maximal ist.