Strahlensatz, Zentrische Streckung, Vierstreckensatz
(Anwendung, Beweis, Konstruktion)

1. Berechne aus den jeweils gegebenen Größen die gesuchten Streckenlängen:

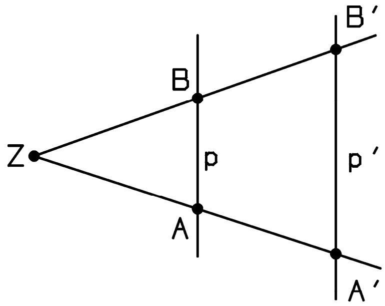


Bild I

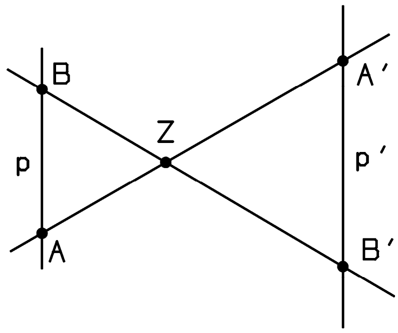
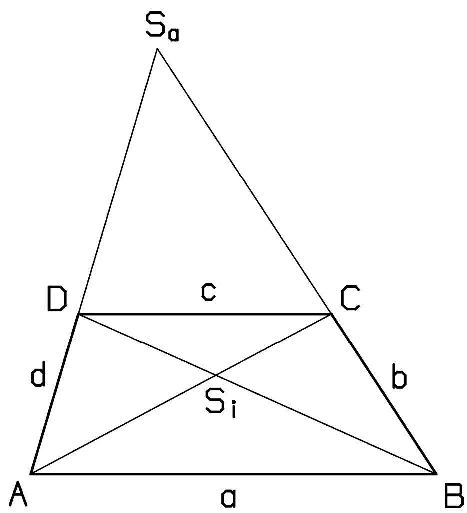


Bild II

Gegeben:		Gesucht:
a)	$\overline{AB} = 2cm$; $\overline{ZA} = 3cm$; $\overline{ZA'} = 5cm$	$\overline{A'B'}$
b)	$\overline{ZA} = 3{,}5cm$; $\overline{ZB} = 2cm$; $\overline{BB'} = 4cm$	$\overline{AA'}$; $\overline{ZB'}$; $\overline{ZA'}$
c)	$\overline{AB} = 3cm$; $\overline{AA'} = 2cm$; $\overline{A'B'} = 5cm$; $\overline{ZB} - \overline{ZA} = 1cm$	$\overline{ZA}$; $\overline{ZA'}$; $\overline{ZB'}$ entsprechend Bild I
d)	$\overline{AA'} = 2{,}5cm$; $\overline{BB'} = 4cm$; $\overline{A'B'} = 4{,}5cm$; $\overline{AB} = 6cm$	$\overline{ZA}$; $\overline{ZB}$; $\overline{ZA'}$; $\overline{ZB'}$

In welchen Fällen gibt es mehrere Lösungen ?
Fertige jeweils zur Kontrolle eine maßstabsgetreue Zeichnung an !

2. In einem Trapez ABCD sind die parallelen Seiten [AB] und [DC] die sogenannten *Grundlinien*, während die Seiten [AD] und [BC] die *Schenkel* des Trapezes heißen. Es sei ferner S_a der Schnittpunkt der verlängerten Schenkel und S_i der Diagonalschnittpunkt. $\overline{AB} = 5cm$, $\overline{DC} = 3cm$.

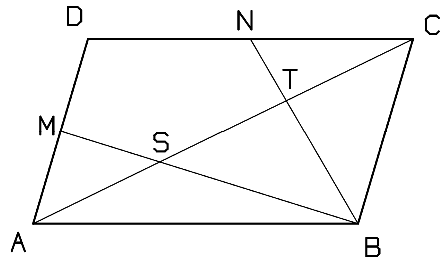


a) In welchem Verhältnis teilt S_i die beiden Diagonalen des Trapezes ?
b) Mit welchen Abbildungsfaktoren bilden die beiden Streckungen mit den Zentren S_i und S_a die Gerade [AB] auf die Gerade [CD] ab ?
c) Berechne die Entfernungen $\overline{AS_a}$, $\overline{DS_a}$, $\overline{CS_a}$ und $\overline{BS_a}$ aus $\overline{AD} = 4cm$ und $\overline{BC} = 3cm$!

3. In einem Trapez teilt der Diagonalschnittpunkt die beiden Diagonalen im Verhältnis 2 :1. Was lässt sich über die Länge der beiden Grundlinien sagen ? Welche besonderen Linien stellen die Diagonalen eines solchen Trapezes im Dreieck ABS_a (siehe Bild der Aufg. 2) dar ?

Strahlensatz, Zentrische Streckung, Vierstreckensatz
(Anwendung, Beweis, Konstruktion)

4. Nebenstehend ist das Parallelogramm ABCD gezeichnet. M und N sind die jeweiligen Seitenmitten.



a) Beweise, dass die Geraden MB und NB die Diagonale [AC] in drei gleiche Teile teilen.
Hinweis: Wende auf die Figur SMABC den Strahlensatz an.

b) Warum gilt $DT \parallel MB$?

5. Für ein Parallelenpaar (p, q) und einen Punkt P außerhalb von p und q gilt:
d (P; p) = 2 cm; d (P; q) = 5 cm.

a) Welchen Abstand hat das Parallelenpaar ? (2 Lösungen)

b) Welche Abbildungsfaktoren erhält man für eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P, die p auf q abbildet ?

6. Zeige an einem Gegenbeispiel, dass der folgende Satz *falsch* ist:
Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Geraden so geschnitten, dass sich die ausgeschnittenen Querstrecken verhalten wie die Entfernungen ihrer auf <u>dem einen Schenkel</u> liegenden Endpunkte vom Winkelscheitel, so sind die schneidenden Geraden parallel.

7. Beweise für eine beliebige Gerade g durch den Schnittpunkt Z zweier Geraden g_1 und g_2: Für alle Punkte P $(P \neq Z)$ von g ist das Verhältnis ihrer Abstände von g_1 und g_2 gleich groß.
Hinweis: Der Satz ist bewiesen, wenn er für zwei beliebige Punkte P und Q auf g zutrifft.

8. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2, deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt, sowie ein Punkt P, der keiner der beiden Geraden angehört. Konstruiere die Gerade PS ohne Kenntnis von S !

9. Beweise den folgenden Satz, dessen Voraussetzung und Behauptung in folgender Form gegeben ist:
Voraussetzung: $AB \parallel A'B'$ (1); $Z \in AA'$ (2);

$$\overrightarrow{ZA'} = m \cdot \overrightarrow{ZA} \text{ und } \overrightarrow{A'B'} = m \cdot \overrightarrow{AB} \text{ für } m \neq 0 \text{ (3)}$$

Behauptung: $Z \in BB'$.

10. Konstruiere durch einen beliebigen Punkt P im Winkelfeld eines gegebenen Winkels eine Gerade, die aus den Schenkeln zwei Strecken ausschneidet, deren Längen sich wie 2,5 : 6 verhalten !

11. Konstruiere durch einen beliebigen Punkt P im Winkelfeld eines gegebenen Winkels eine Gerade, aus der die Schenkel des Winkels eine Strecke mit dem Mittelpunkt P ausschneiden !
Anleitung: Ziehe durch P eine Parallele zu einem Schenkel !

12. Konstruiere durch einen Punkt P im Winkelfeld eines gegebenen Winkels eine Gerade, aus der die Schenkel eine Strecke ausschneiden, welche durch P im Verhältnis zweier gegebener Streckenlängen a und b geteilt wird ! (Beachte Aufgabe 11 !)

Strahlensatz, Zentrische Streckung, Vierstreckensatz
(Anwendung, Beweis, Konstruktion)

13. Beweise:
Teilt man die Grundlinien [AB] und [CD] eines Trapezes ABCD von A bzw. C aus im gleichen Verhältnis, so geht die Verbindungsgerade der Teilungspunkte durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen [AC] und [BD].
Erstelle zuerst eine Zeichnung mit einem selbstgewählten Teilungsverhältnis.

14. Konstruiere die Länge x nach der jeweils angegebenen Proportion, wobei die gegebenen Zahlen als Streckenmaßzahlen, bezogen auf die Längeneinheit 1 cm, angenommen werden:

a) $4:3=8:x$; b) $6:x=2{,}5:4$; c) $x:3{,}5=4:7$; d) $9:2=x:1$.

Überprüfe jeweils den Messwert für die gesuchte Streckenmaßzahl x durch Rechnung !

15. a, b und c seien vorgegebene Streckenlängen.
Konstruiere jeweils die Streckenlänge x, die folgende Proportionen erfüllt:

I) $x:a=b:c$; II) $a:x=b:c$; III) $b:a=x:c$.

Drücke jeweils die Maßzahl von x durch die Maßzahlen von a und b aus, wenn für c die Längeneinheit gewählt wird !

16. Wie kann man eine Strecke konstruieren, deren Maßzahl
a) dem Produkt,
b) dem Quotienten der Maßzahlen zweier gegebener Streckenlängen c und d gleich ist, bezogen auf die Längeneinheit 1 cm, für c = 4 LE, d = 2 LE ?
Führe die Konstruktion auch für die Längeneinheit 2 cm durch !

17. In einem Dreieck ABC mit a = 5 cm, b = 7 cm und dem Winkel $\gamma = 50°$ teilt ein Punkt T die Seite [AC] innen im Verhältnis $\overline{AT}:\overline{TC}=3:2$ $\left(T\in[AC]\right)$. Konstruiere Punkt T !
Welche Angaben in der Aufgabe sind für die Lage von T ohne Bedeutung ?

18. Durch einen festen Punkt P außerhalb einer gegebenen Geraden AB sollen zwei zueinander senkrechte Geraden gelegt werden, welche die Strecke [AB] innen und außen im gleichen Verhältnis teilen.

19. Die Seite [AC] eines Dreiecks ABC wird durch w_β in Teilstrecken mit $\overline{AT_i}=5\text{cm}$ und $\overline{CT_i}=2\text{cm}$ zerlegt. Berechne die Seitenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$, wenn $\overline{AB}-\overline{BC}=6\text{cm}$ beträgt !

20. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ aus:

a) c = 5 cm; $b:a=2:1$; $w\gamma=3{,}5\text{cm}$.
b) b = 6 cm; $a:c=2:5$; $s_b=4{,}5\text{cm}$.
c) a = 6,5 cm; $b:c=1:3$; $h_a=2\text{cm}$ (2 Lösungen).

21. Von einem Dreieck ABC ist bekannt: a = 6 cm, s_a = 7,5 cm; $s_b : s_c = 5 : 2$.
Konstruiere das Dreieck !

Strahlensatz, Zentrische Streckung, Vierstreckensatz
(Anwendung, Beweis, Konstruktion)

22. Gegeben sind die Punkte A, B mit $\overline{AB} = 7\text{cm}$. Konstruiere die Menge aller Punkte P mit dem Entfernungsverhältnis $7:9$ von A und B soweit die Heftseite dies zulässt ! Beachte, dass der äußere Teilpunkt T_a für die Konstruktion unzugänglich ist !

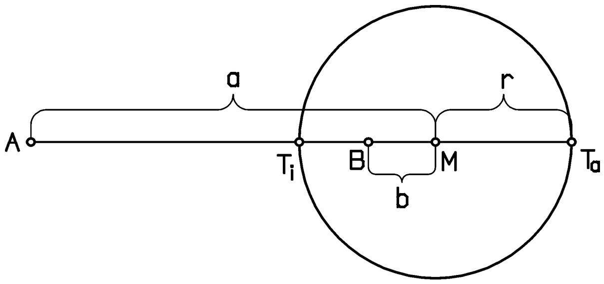
23. Wo liegen alle Punkte, von denen aus zwei Strecken [AB] und [BC] auf der Geraden AC jeweils unter gleichem Sehwinkel erscheinen ? Konstruiere für $\overline{AB} = 4{,}5\text{ cm}$ und $\overline{BC} = 2{,}5\text{ cm}$ die gesuchte Punktmenge. Gib nun einen Punkt P an, von dem aus der gemeinsame Sehwinkel je $45°$ beträgt.

24. Gegeben ist eine Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 7\text{cm}$.

a) Zeichne den Kreis des Apollonius für das Entfernungsverhältnis $2:5$.

b) Berechne den Radius des Apollonischen Kreises sowie die Entfernung des Kreismittelpunktes von B.

25. Auf der Verlängerung einer gegebenen Strecke [AB] liegt der Punkt M. Es sei $\overline{AM} = a$ und $\overline{BM} = b$ gegeben. Ein Kreis um M soll [AB] innen und außen im gleichen Verhältnis teilen.

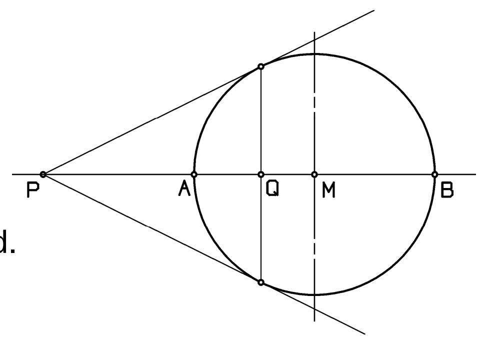


a) Drücke $\overline{AT_i}$, $\overline{BT_i}$, $\overline{AT_a}$ und $\overline{BT_a}$ durch a, b und r aus.

b) Zeige, dass folgendes gilt: $r = \sqrt{a \cdot b}$.
Konstruiere r !

26. Von einem Punkt P werden die beiden Tangenten an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M gezogen. Die Gerade PM schneidet den Kreis in den Punkten A und B und die Berührsehne im Punkt Q.
Beweise, dass A, B, Q, P harmonische Punkte sind.

Hinweis: Berührsehne ist die Verbindungsstrecke der beiden Tangentenberührungspunkte.



27. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 8\text{cm}$, $\overline{BC} = 7\text{cm}$, $\overline{AC} = 4\text{cm}$.

a) Konstruiere den inneren Punkt T, der [CB] im Verhältnis $2:3$ teilt.

b) Die Parallele durch T zu AB schneidet AC in R; $RB \cap AT = \{S\}$.

Gib das Verhältnis $\overline{TS} : \overline{SA}$ an, ohne die Einzelstrecken zu berechnen.

Strahlensatz, Zentrische Streckung, Vierstreckensatz
(Anwendung, Beweis, Konstruktion)

28. Zu einer gegebenen Strecke [AB] mit der Länge a und dem gegebenen Streckungsfaktor m > 0 wird das äußere Zentrum Z_a und das innere Zentrum Z_i einer Streckung so konstruiert, dass $A \xrightarrow{S(Z_a;\,m)} B$ und $A \xrightarrow{S(Z_i;\,-m)} B$ gilt.

a) Konstruiere die Streckzentren für a = 7 cm und m = 0,4.

b) Berechne $\overline{Z_iB}$ und $\overline{BZ_a}$ zuerst für den konstruierten Fall und dann allgemein für beliebiges a und m.

c) Zeige, dass $\overline{Z_iZ_a} = a$ ist, wenn man $m = \sqrt{2} - 1$ setzt.

29. *Löse die Aufgaben a) bis c) durch Konstruktion!*

Bilde einen Kreis um M mit Radius r = 4 cm durch zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Faktor m für folgende Fälle ab:

a) $\overline{ZM} = 5\text{cm}$; $m = \frac{2}{5}$

b) $\overline{ZM} = 3\text{cm}$; $m = -\frac{2}{3}$

c) Ein Punkt P des gegebenen Kreises soll in einen festen Punkt P‘ abgebildet werden mit $\overline{P'M} = 4\text{cm}$, $\overline{P'P} = 5\text{cm}$ und $|m| = 0{,}5$ (2 Lösungen).

30. Konstruiere die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit der Strecke [M_1 M_2] und den Radien r_1, r_2 für folgende Fälle:

a) $\overline{M_1M_2} = 6\text{cm}$, r_1 = 3 cm, r_2 = 4 cm;

b) $\overline{M_1M_2} = 4\text{cm}$, r_1 = 2 cm, r_2 = 4 cm;

c) $\overline{M_1M_2} = 8\text{cm}$, $r_1 = r_2$ = 3 cm;

d) $\overline{M_1M_2} = 3\text{cm}$, r_1 = 4 cm, r_2 = 1 cm.

31. Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden sich in A und B.
Der Schnittpunkt der gemeinsamen Außentangenten sei Z_a. Verbinde einen der beiden Kreisschnittpunkte, z.B. A, mit Z_a und zeige, dass AZ_a einen der beiden Winkel halbiert, welchen die Geraden M_1A und M_2A miteinander einschließen !

32. Drei Kreise mit den Radien r_1, r_2 und r_3, deren Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, berühren sich gegenseitig von außen und haben ein gemeinsames Außentangentenpaar.

a) Konstruiere drei solche Kreise, wenn r_1 = 1 cm und r_2 = 2 cm gelten soll !

b) Zeige, dass für die drei Radien gilt: $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$.
(Betrachte eine geeignete zentrische Streckung und ihre Umkehrabbildung.)

33. Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien r_1 = 4 cm und r_2 = 3 cm, die sich von außen berühren. Konstruiere alle Geraden, aus denen von beiden Kreisen je eine Sehne von 5 cm Länge herausgeschnitten wird.
Hinweis: Wo liegen die Mittelpunkte aller Sehnen mit 5 cm Länge in einem gegebenen Kreis ?

34. Von einem Punkt P außerhalb eines Kreises sind die beiden Tangenten an den Kreis gezeichnet. Konstruiere mit Hilfe einer geeigneten zentrischen Streckung einen Kreis, der die beiden Tangenten und den gegebenen Kreis berührt. (2 Lösungen !)