Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben ab Seite 4

Grundlagen und Begriffe der Differenzialrechnung

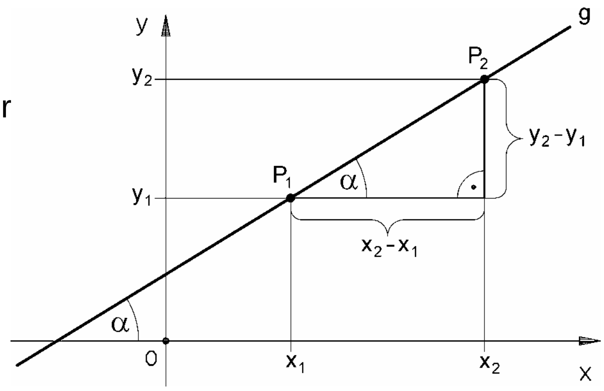
Die Zeichnungen und Erklärungen sind etwas ausführlicher als notwendig um verschiedene Schreibweisen und Darstellungen aufzuzeigen.

Steigung einer Geraden:

Es seien $P_1\left(x_1 \mid y_1\right)$ und $P_2\left(x_2 \mid y_2\right)$ zwei Punkte der Geraden g mit $x_1 \neq x_2$.

Dann gilt für die Steigung m: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Der Steigungswinkel ist: $\boxed{m = \tan\alpha}$



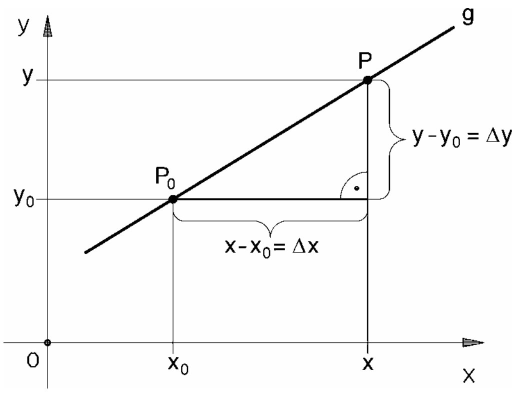
Differenzenquotient:

Ist der Funktionsgraph eine Gerade, so ist ihre Steigung in jedem beliebigen Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$ durch den Faktor m festgelegt.

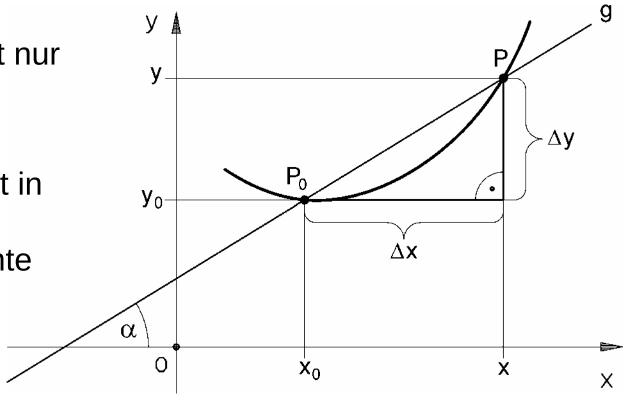
Der Quotient aus der Differenz der y - Werte und der x - Werte bezüglich der Stelle x_0 nennt man

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m}$$



Der Begriff des Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist nicht nur bei Geraden definiert, sondern wird auch bei gekrümmten Graphen angewendet.
Diese Verallgemeinerung des Steigungsbegriffs ist in nebenstehender Skizze dargestellt.
Die Sekante durch P_0 und P ist die bereits bekannte Gerade.
Die Steigung aller Sekanten durch $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$ entspricht jeweils dem Differenzenquotienten bezüglich der Stelle x_0.



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Die Gleichung des Differenzenquotienten läßt sich auch wie folgt schreiben:

Differenzenquotient:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

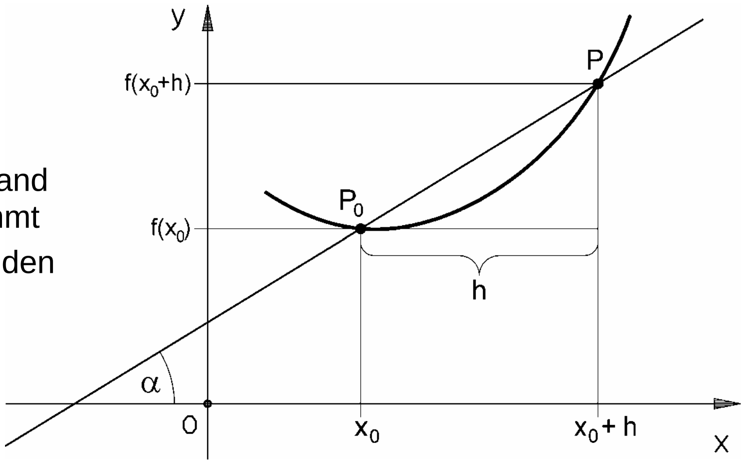
Nebenbei bemerkt:
Die Sekantensteigung ist identisch mit der Geradensteigung:

$$\boxed{m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha}$$

Differenzialquotient oder 1. Ableitung oder Steigung der Tangente

Wird für den Abstand $\Delta x = x - x_0$ zur Vereinfachung die Variable h eingesetzt, dann hat der Differenzenquotient folgende Form:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$



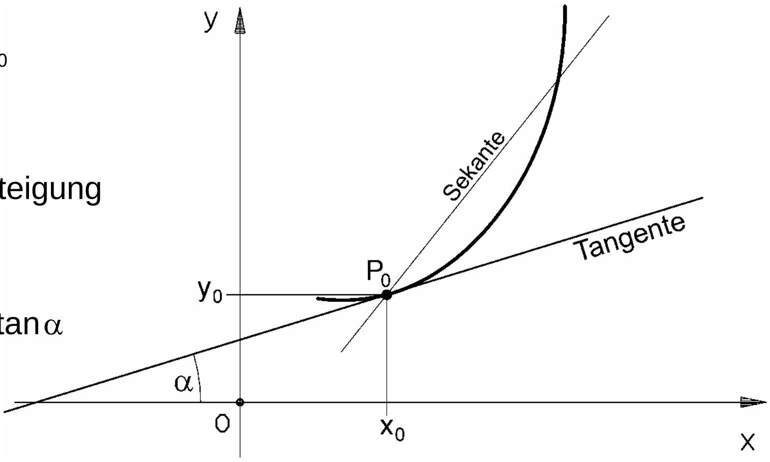
Verringert man nun - gedanklich - den Abstand $h\,(= \Delta x)$ so daß dieser den Wert Null annimmt (man schreibt auch $x \to x_0$), so erhält man den Grenzwert des Differenzenquotienten.
Dieser Grenzwert heißt

Differenzialquotient

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \quad \text{mit } |h| > 0$$

oder

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{mit } x \neq x_0$$



Der Differenzialquotient ist zugleich die Steigung der Tangente im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$

$$m_T = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

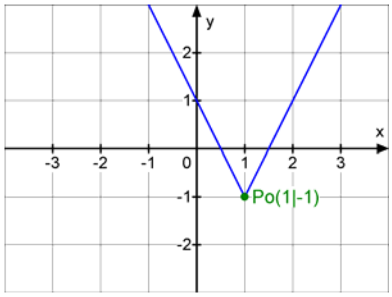
Definitionen:

Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

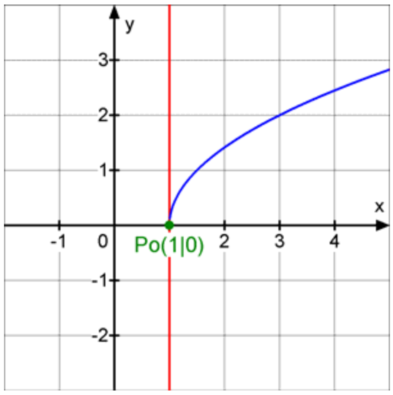
Die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 ist die Steigung des Graphen G_f im Punkt $P_0\left(x_0 \mid y_0\right)$.
Für den Neigungswinkel α der Tangente in diesem Punkt gilt: $\tan\alpha = f'(x_0)$

Sonstiges:

Es könnte sein, daß es in P_0 keine eindeutige Tangente an den Graphen gib. Ein Beispiel ist in der Skizze rechts dargestellt.
In diesem Fall existiert auch kein Grenzwert.



Für den Fall, daß die Tangente senkrecht verläuft (siehe nebenstehende Skizze), ist die Steigung der Tangente nicht definiert.
Auch in diesem Fall existiert kein Grenzwert.



Formeln:

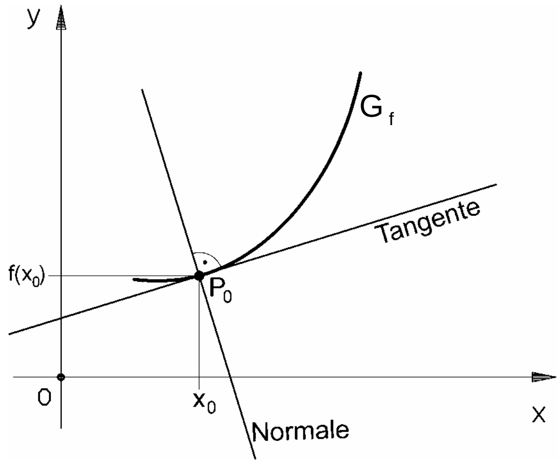
Nachfolgende Formeln sind hier nur der Vollständigkeit angegeben. In den Lösungen zu den Aufgaben werden sie nicht verwendet.

Gleichung der Tangente von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$$

Gleichung der Normale von G_f an der Stelle x_0:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)} \quad \text{falls } f'(x_0) \neq 0$$



Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

Aufgaben

1. Bestimme jeweils den Neigungswinkel der Tangente an die Parabel $y = x^4$ in den folgenden Kurvenpunkten (2 Dezimalstellen):

a) $R(0{,}8\,|\,?)$ b) $S(-1\,|\,?)$ c) $T(0\,|\,?)$

2. Gegeben ist die Parabel $y = 0{,}5x^2$. Berechne die Koordinaten der Berührpunkte von Tangenten die folgende Neigungswinkel haben (2 Dezimalstellen):

a) $62°$ b) $-54{,}12°$ c) $0{,}01°$

3. Bestimme die Gleichung der Tangente an die Parabel $y = 2x^2$, die

a) parallel ist zur Geraden $g:\ 2x + 1 - y = 0$.

b) zur Geraden $h:\ 2y - 3x + 6 = 0$ orthogonal angeordnet ist.

4. Gegeben sei die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -x^2 + 6x - 5,\quad x \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $P(3\,|\,4)$.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente t_2 und der Normalen an den Graphen von f im Punkt $Q(1\,|\,0)$.

c) Bestimme den Schnittwinkel der Tangenten t_1 und t_2.

5. Bestimme die Tangenten an die Parabel $y = x^2 - 2$, die sich im Punkt $S(0\,|\,-4{,}25)$ schneiden.

6. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $A_0(-1\,|\,-1)$.
Die Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechne die Fläche des Dreiecks.

7. Die Tangente an den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto x^3$ im Berührpunkt $R(1\,|\,1)$ schneidet den Graphen im Punkt Q. Berechne die Gleichung der Tangente sowie die Koordinaten das Schnittpunktes Q.

8. Bestimme für den Graphen der Funktion $f:\ x \mapsto \sqrt{x} - 2,\quad x \in \mathbb{R}_0^+$

a) den Neigungswinkel der Tangente im Punkt $B(4\,|\,?)$.

b) die Koordinaten jenes Kurvenpunktes P, für den die Tangente an f unter 60° gegen die x-Achse geneigt ist.

Tangenten an Funktionsgraphen (Differenzialrechnung)

Klasse 10 / 11

9. In welchen Punkten des Graphen mit der Gleichung $f:\ y=-\frac{1}{x}$ sind die Tangenten parallel zur Geraden $g:\ 0{,}5x-y=0$?

10. Bestimme im Schnittpunkt der beiden Graphen mit den Gleichungen $y=\sqrt{x}\ ;\ x\in\mathbb{R}_0^+$ und $y=\frac{1}{x}$ die Tangenten t_1 und t_2 (an den jeweiligen Graph).

11. Berechne den Neigungswinkel φ gegen die x-Achse der Tangente im Punkt $P(1\,|\,?)$ an die Sinuskurve mit der Gleichung $y=\sin x$.

12. Die Graphen der Funktionen $f:\ x\mapsto \sin x;\ x\in[-0{,}5;\ 2]$ und $g:\ x\mapsto\cos x;$ $x\in[-0{,}5;\ 2]$ schneiden sich im Punkt S. Bestimme jeweils den spitzen Winkel den die beiden Tangenten im Punkt S mit der der x-Achse bilden.

13. Bestimme die beiden waagerechten Tangenten am Graph der Funktion $h:\ x\mapsto x+2\sin x;\ D_f=[0;\ 2\pi]$

14. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2\,|\,?)$ des Graphen von $f:\ x\mapsto 0{,}5(x-1)^2+1$?

15. An den Parabelbogen $y=-0{,}4(x-2)^2-1{,}5$ soll vom Punkt $R(0\,|\,5)$ ausgehend eine Tangente so gelegt werden, daß ihre Steigung einen negativen Wert einnimmt. Bestimme die Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes B_0.

16. In welchen Punkten des Graphen von $f:\ x\mapsto\frac{1}{3}x^3-x^2+x+\frac{2}{3};\quad D_f=\mathbb{R}$ schließt die Tangente mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein ?

Wie ist ohne Zeichnung erkennbar, daß es keine Tangenten gibt, die mit der x-Achse einen negativen Winkel einschließen ?

17. Berechne den Schnittwinkel der Graphen folgender Funktionen:

$f:\ x\mapsto 8x^{-2};\quad x\in\mathbb{R}^+$ und $g:\ x\mapsto 0{,}5x^2;\quad x\in\mathbb{R}^+$

