

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(F) Exponentielles Wachstum, Exponentieller Zerfall

Grundlagenwissen: Rechenregeln zur Exponential- und Logarithmusrechnung.
 Funktionsgleichungen für exponentielles Wachstum und Zerfall.

1. a) Berechnen Sie $y(t)$ nach 8 s für $y(t) = 125 \left(1 - e^{-\frac{t}{2s}} \right)$.
 b) Berechnen Sie die Zeit t nach einer Veränderung $y(t)$ von 0 auf 80.

2. Ein Kapital von 8000 € wird jährlich mit 2% verzinst. Die Zinsen werden immer dem Kapital zugeschlagen (Zinseszinsen). Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital verdoppelt, wenn man unterstellt, dass sich der Zinssatz über die Laufzeit nicht ändert.

Berechnungsformel:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n \quad \text{mit}$$

K_n = Kapital nach n Jahren (in €)
 K_0 = Anfangskapital (in €)
 p = Zinssatz in %
 n = Anzahl der Jahre

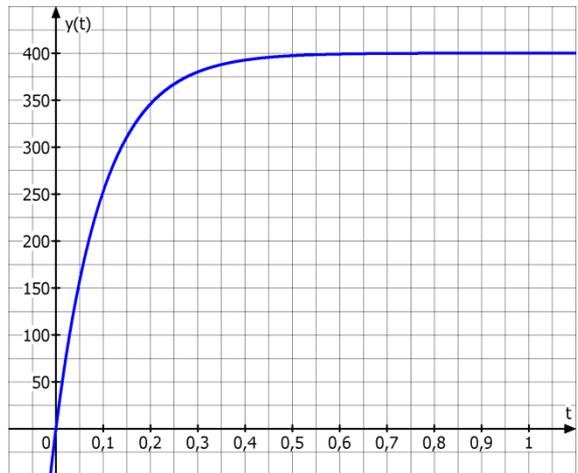
- 3.0 Gegeben sind:

$$y(t) = y_0 \left(1 - e^{-kt} \right)$$

$$y_0 = 400$$

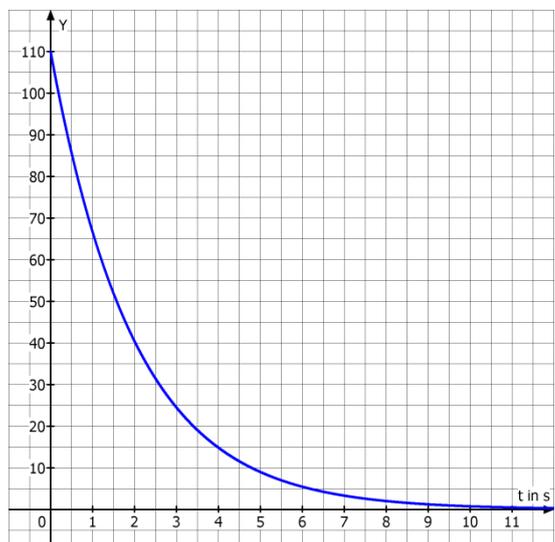
$$k = 10 \text{ s}^{-1}$$

- 3.1 Berechnen Sie $y(t)$ für $t = 0,1 \text{ s}$.
- 3.2 Berechnen Sie die Zeit t nach der $y(t)$ 85% von y_0 erreicht hat.



- 4.0 Ein Abklingvorgang wird mit folgender Funktion beschrieben:
 $y(t) = y_0 \cdot e^{-0,5 \cdot t}$
 (vgl. Diagramm rechts).

- 4.1 Bestimmen Sie die Zeit, bis der Messwert Y auf die Hälfte seines Ausgangswertes gefallen ist.



Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

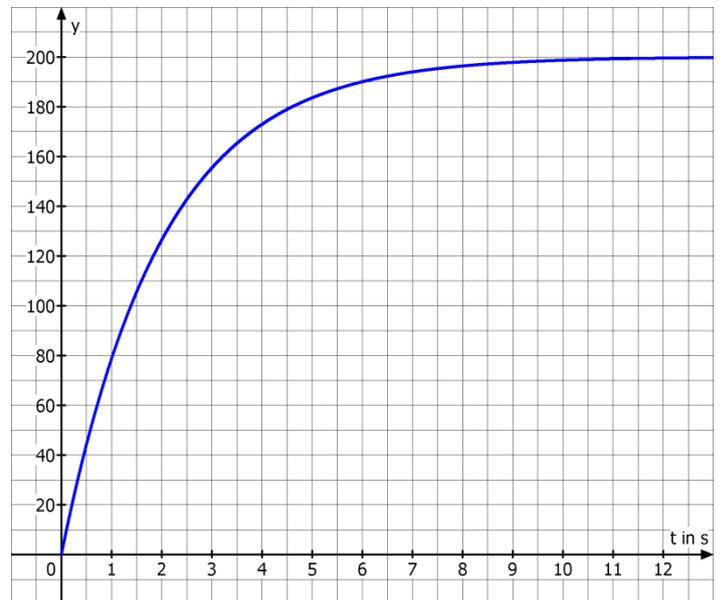
(F) Exponentielles Wachstum, Exponentieller Zerfall

- 5.0** Der Ladevorgang eines bestimmten Kondensators verläuft nach folgender Gesetzmäßigkeit:

$$y(t) = y_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

τ entspricht der Zeit, die benötigt wird um 63% von y_0 zu erreichen.

- 5.1** Ermitteln Sie anhand der Grafik y_0 und τ . Stellen Sie mit diesen Werten die Funktion $y(t)$ auf.
- 5.2** Berechnen Sie den Wert für $y(t)$, wenn 8 s verstrichen sind.
- 5.3** Berechnen Sie die Zeit t , wenn $y(t) = 180$.



- 6.** Plutonium (Halbwertszeit $T = 138$ Tage) zerfällt nach folgender Funktion:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,5^{\frac{t}{T}}$$

Nach wie viel Tagen sind noch 20 mg übrig, wenn die Anfangsmasse 5g war?

- 7.0** Eine Bakterienkultur ist nach 2 h auf 2700 Bakterien angewachsen. Der Wachstumsvorgang kann nach folgender Gleichung angenommen werden:
 $n = n_0 \cdot e^{k \cdot t}$ mit $k = 0,4 \text{ h}^{-1}$
- 7.1** Berechnen Sie n_0 .
- 7.2** Berechnen Sie die Zeit, in der die Bakterienzahl von 4000 auf 8000 angewachsen ist.
- 7.3** Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien, die nach einem Tag (24 h) und $n_0 = 1000$ entstanden sind.

Aufgaben für Klausuren und Abschlussprüfungen

(F) Exponentielles Wachstum, Exponentieller Zerfall

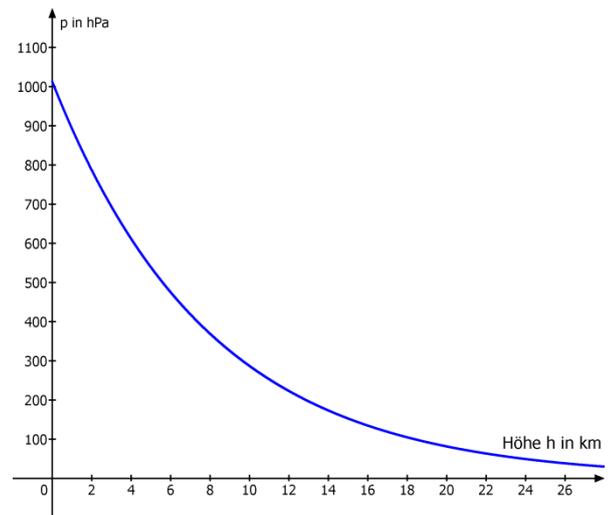
- 8.0** Der Luftdruck auf der Erde nimmt mit steigender Höhe nach der Formel

$$p = p_0 \cdot 0,5^{\frac{h}{5,5 \text{ km}}} \text{ ab.}$$

p_0 = Luftdruck in Meereshöhe (1013 hPa).

- 8.1** Berechnen Sie den Luftdruck in 8 km Höhe.

- 8.2** In welcher Höhe beträgt der Luftdruck 500 hPa ?



- 9.** Beim Einschenken eines Glases Pils entsteht eine 50 mm hohe Bierschaumkrone. Nach 60 s ist die Höhe des Schaums auf 40 mm gesunken. In welcher Zeit ist die Schaumkrone von 40 mm auf 10 mm gesunken?
Man kann davon ausgehen, dass von einer vorhandenen Menge Bierschaum in der gleichen Zeit immer die Hälfte des Schaums zerfällt?
- 10.** Der Körper einer bestimmten Person baut Nikotin mit einer Halbwertszeit von 90 min ab.
a) Wie viel Prozent des vorhandenen Nikotins werden pro Minute abgebaut?
b) Wie lange dauert es, bis noch 5% der ursprünglichen Menge vorhanden ist.
- 11.** Das Inselreich Atlantis hatte im Jahre 10.000 v. Chr. (angenommen) 3 Mio. Bewohner. Seine Bevölkerung wuchs pro Jahr um 2,5%.
a) Wie viele Menschen lebten in Atlantis im Jahre 9988 v. Chr., wenn für den betrachteten Zeitraum exponentielles Wachstum angenommen werden darf?
b) Nach wie vielen Jahren hatte Atlantis 3,6 Mio. Einwohner?
c) Welchen Prozentsatz hätte die Wachstumsrate gehabt, wenn innerhalb von 12 Jahren die Bevölkerung um 500 000 Personen angewachsen wäre?
- 12.** Die Halbwertszeit für das Radiumisotop Ra-226 beträgt etwa 1602 Jahre.
a) Wie viel ist von einem Gramm des Radiumisotops, das Marie Curie 1898 zum experimentieren nutzte, im Jahre 2012 noch übrig?
b) Wann wird nur noch 0,1 g vorhanden sein?
- 13.** Von einem See sind 0,5% der Wasserfläche mit Algen bedeckt. Diese Algenfläche verdoppelt sich alle 4 Tage. Wie lange würde es dauern, bis der ganze See mit Algen bedeckt ist?